$\mathcal{N}=1$ 超対称 QCD における超対称グラディエントフローの摂動論と発散構造

鈴木 光世

大阪公立大学　素粒子論研究室

PTEP 2023, 013B02 (with D. Kadoh, N. Maru, N. Ukita)

2023/03/17 NITEP 素粒子現象論研究会 2022 @阪公大

個人的な新粒子発見

- 体内にあるだけなら困らない
- 強い相互作用（詰まる）はすごく困る

トークは、超対称理論の摂動計算

1. こっちはあると喜ぶ人もいる
   - 大統一理論、超弦理論、双対性、AdS/CFT、...
2. 非摂動、特に格子をどう攻めるか？
3. フロー（物理量の新定式化）を活用したい
4. $\mathcal{N} = 1$ SQCD で超対称フローを解析した

注目するのは、対称性・くりこみ性

1. フローでしていることの整理（準備）
2. フローを超対称理論へ（やりたいこと）
3. 超対称フローと $\mathcal{N} = 1$ SQCD の整理（準備）
4. 2 点関数が 1 ループで超対称（今回やったこと）

境界の理論とフロー方程式

境界の Yang–Mills 理論

$$S_{\mathsf{YM}} = \frac{1}{2g^2} \int \mathrm{d}^4 x \, \mathrm{tr} \left\{ F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \right\},$$

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + i[A_\mu(x), A_\nu(x)]$$

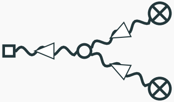
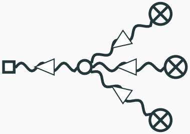
フロー場 $\quad B_\mu(t,x)|_{t=0} = A_\mu(x)$

$$\begin{aligned} \partial_t B_\mu(t,x) =& \underline{D_\nu G_{\nu\mu}(t,x)} \leftarrow -g^2 \frac{\delta S_{\mathsf{YM}}}{\delta A_\mu}|_{A_\mu \to B_\mu} \\ =& \partial_\nu \partial_\nu B_\mu(t,x) + 2i[B_\nu, \partial_\nu B_\mu(t,x)] \\ & - [B_\nu, [B_\nu, B_\mu]] + \dots \end{aligned}$$

フロー方程式の形式解と逐次近似解

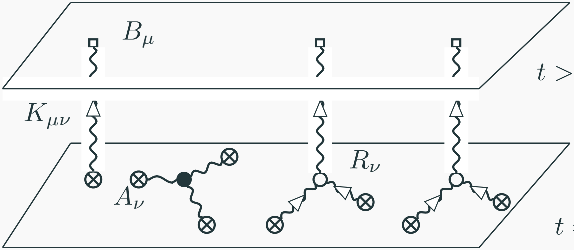
$$B_\mu(t,x) = \int \mathrm{d}^4y \left\{ \underbrace{K_t(x-y)_{\mu\nu}}_{\text{熱核}} A_\nu(y) \right.$$

$$\left. + \int_0^t \mathrm{d}s K_{t-s}(x-y)_{\mu\nu} \underbrace{R_\nu(s,y)}_{\text{非線型項}} \right\}.$$

$=$  $+$  $+$  $+ \dots$

＊逐次近似は g での摂動展開（$A_\mu \to g_0 A_\mu$）

摂動論のイメージと相関関数



$t > 0$, フロー理論

$t = 0$, 境界の理論

$$\langle B^{a_1}_{\mu_1}(t_1, x_1) \cdots B^{a_n}_{\mu_n}(t_n, x_n) \rangle$$
$$= \frac{\int \mathcal{D}A_\mu \; B^{a_1}_{\mu_1}(t_1, x_1) \cdots B^{a_n}_{\mu_n}(t_n, x_n) e^{-S_{\mathsf{YM}} - S_{\mathsf{gf}} - S_{c\bar{c}}}}{\int \mathcal{D}A_\mu e^{-S_{\mathsf{YM}} - S_{\mathsf{gf}} - S_{c\bar{c}}}}.$$

フロー場の任意の局所積が有限 [Lüscher-Weisz (2011)]

境界はパラメタと波動関数のくりこみ

$$g_0^2 = \mu^{2\varepsilon} g^2 Z_g, \quad \xi_0 = \xi Z_A, \qquad A_\mu = Z_g^{1/2} Z_A^{1/2} A_{R,\mu}.$$

フローするとパラメタくりこみだけ

$$g_0^2 = \mu^{2\varepsilon} g^2 Z_g, \quad \xi_0 = \xi Z_A, \qquad B_\mu = B_{R,\mu}.$$

局所積にも余計なくりこみなし

$$g_0^2 \delta^{ab} \int_p \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2} \quad \to \quad g_0^2 \delta^{ab} \int_p \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2} e^{-(t+s)p^2}.$$

有限な値は正則化によらない

エネルギー運動量テンソルの表式 [H. Suzuki (2013)]

- 並進対称性に対応したネーターカレント
- 次元正則化なら定義できる
- 格子ではむずかしい

フロー理論を正則化の橋渡しにできる

フェルミオンの場合

境界の理論

$$\int \mathrm{d}^4x\,\bar{\psi}(x)(\not{D} + m_0)\psi(x)$$

拡散方程式を考えるのが重要 [Luscher (2013)]

$$\partial_t \chi(t,x) = D_\mu D_\mu \chi(t,x)$$

リスケールしてしまえば紫外有限

$$\chi(t,x) = Z_\chi^{1/2} \chi_R(t,x),$$

$$Z_\chi = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon}(-3C_F) + O(g^4).$$

グラディエントフローの教え

拡散方程式による粗視化

- 任意の局所積で紫外発散を軽減
- 対称性も大事
  - ゲージ共変なフロー方程式
  - 大域的な対称性が有限性を保証
    [Luscher-Weisz (2011), Hieda-Makino-Suzuki(2016)]

有限な値の活用

- 物理量の正則化によらない表式 [H. Suzuki (2013)]
- 格子 QCD における数値計算

[Suzuki (2017); Hatsuda, et al. (2015); Kanaya, et al. (2017)]

1. フローでしていることの整理（準備）
2. フローを超対称理論へ（やりたいこと）
3. 超対称フローと $\mathcal{N}=1$ SQCD の整理（準備）
4. 2 点関数が 1 ループで超対称（今回やったこと）

超対称理論への拡張を考える

フローのくりこみ性から超対称理論

- エネルギー運動量の表式
  $\rightarrow$ 超対称性の破れ, 双対な BH の熱力学, ...
- 超カレントの表式
  $\rightarrow$ 格子上に超対称理論をのせる

超対称理論からフローを理解

- フロー時間とエネルギースケールの対応？
- 理論の対称性をどう尊重するか？

そのままでは超対称性を尊重しきれない

$$\partial_t A_\mu = -g^2 \frac{\delta S_{\mathsf{YM}}}{\delta A_\mu} \quad \to \quad A_\mu(t,x) = A_{R,\mu}(t,x)$$

$$\partial_t \lambda = D_\mu D_\mu \lambda \quad \to \quad \lambda(t,x) = Z_\lambda^{1/2} \lambda_R(t,x)$$

- 超対称を保つ格子作用でどう使う？ [Sugino (2004)]
- 有限性を保証していたのはゲージ対称性

⇩

超場でのグラディエントで考える

[Kikuchi-Onogi (2014), Kadoh-Ukita (2018), Kadoh-Kikuchi-Ukita (2019)]

1. フローでしていることの整理（準備）
2. フローを超対称理論へ（やりたいこと）
3. 超対称フローと $\mathcal{N}=1$ SQCD の整理（準備）
4. 2 点関数が 1 ループで超対称（今回やったこと）

$\mathcal{N}=1$ 超対称 QCD $S_{\text{SQCD}} = S_{\text{SYM}} + S_{\text{MAT}}$

$SU(N_c)$ ゲージ理論、N_f フレーバー、超場

$$
\begin{aligned}
S_{\text{SYM}} &= \frac{1}{2g_0^2}\int \mathrm{d}^4x\,\mathrm{tr}\left(W^\alpha W_\alpha|_{\theta\theta} + \bar{W}_{\dot\alpha}\bar{W}^{\dot\alpha}|_{\bar\theta\bar\theta}\right),\\
S_{\text{MAT}} &= \int \mathrm{d}^4x \left\{Q_+^\dagger e^{2V} Q_+ + Q_- e^{-2V} Q_-^\dagger\right\}\Big|_{\theta\theta\bar\theta\bar\theta}\\
&\qquad + m_0\Big(Q_- Q_+|_{\theta\theta} + Q_+^\dagger Q_-^\dagger|_{\bar\theta\bar\theta}\Big).
\end{aligned}
$$

超対称フロー方程式 [Kadoh-Ukita (2022)]

$$\partial_t V^a = -\frac{1}{2} g^{ab} \frac{\delta S_{\mathsf{SYM}}}{\delta V^b} + \delta_\Lambda V^a,$$
$$\partial_t Q_+ = -\frac{1}{4} \bar{D} \bar{D} \left(e^{-2V} \frac{\delta S_{\mathsf{MAT}}(m_0 = 0)}{\delta Q_+^\dagger} \right) + \delta_\Lambda Q_+.$$

- SUSY 変換とゲージ変換の下で共変
- WZ ゲージを保っている

$\mathcal{N}=1$ 超対称 QCD の成分場形式

Wess-Zumino ゲージ，Euclid

$$S_{\mathsf{SYM}} = \frac{1}{g_0^2}\int \mathrm{d}^4x\left\{\mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^2 + \bar{\lambda}\not{D}\lambda + D^2\right)\right\},$$

$$S_{\mathsf{MAT}} = \int \mathrm{d}^4x\left\{|D_\mu\varphi_+|^2 + |D_\mu\varphi_-|^2 + \bar{\psi}\not{D}\psi \right.$$
$$\left. + |G_+|^2 + |G_-|^2 + (\text{相互作用項})\right\}.$$

ゲージ多重項: A_μ, λ, D, 物質多重項: $\varphi_\pm, \psi_\pm, G_\pm$

ベクトル超場の超対称フローを成分場に

ゲージ場

$$\partial_t A_\mu(t,x) = D_\nu F_{\nu\mu}(t,x) \underline{+ i\bar{\lambda}(t,x)\gamma_\mu\lambda(t,x)}$$

ゲージーノ

$$\partial_t \lambda(t,x) = \not{D}^2\lambda(t,x) \underline{- i[\gamma_5\lambda(t,x), D(t,x)]}$$

ゲージ共変かつ”超対称” [Kadoh-Ukita (2019)]

$$[\delta_\xi, \partial_t] A_\mu(t,x) = \delta^g_{\tilde{\omega}} A_\mu(t,x)$$

カイラル超場の超対称フローを成分場に

スクォーク

$$\partial_t \varphi_\pm = D_\mu D_\mu \varphi_\pm \underline{+ i\sqrt{2} i \bar{\lambda} P_\pm \psi}$$

クォーク

$$\begin{aligned}\partial_t \psi = \not{D}^2 \psi &\underline{+ i\sqrt{2} P_+ (\gamma_\mu \lambda D_\mu \varphi_+ + i\lambda G_+)} \\ &\underline{+ i\sqrt{2} P_- (\gamma_\mu \lambda D_\mu \varphi_- + i\lambda G_-) - iD\gamma_5 \psi}\end{aligned}$$

ゲージ共変かつ"超対称" [Kadoh-Ukita (2022)]

$$[\delta_\xi, \partial_t]\varphi_\pm(t,x) = \delta^g_{\tilde{\omega}} \varphi_\pm(t,x)$$

1. フローでしていることの整理（準備）
2. フローを超対称理論へ（やりたいこと）
3. 超対称フローと $\mathcal{N}=1$ SQCD の整理（準備）
4. 2 点関数が 1 ループで超対称（今回やったこと）

ゲージ多重項の発散構造を次元正則化で見る

境界のくりこみ

$$Z_g = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon}(-3N_c + N_f),$$

$$Z_A = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon}\left(\frac{3-\xi}{2}N_c - N_f\right)$$

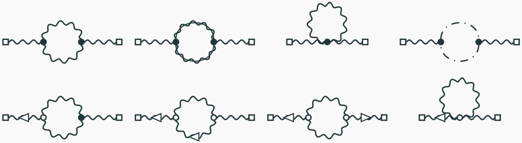
$$Z_\lambda = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon}(-\xi N_c - N_f)$$

超対称なフローではどうなるか？

ゲージ場の１ループ補正 [D. Kadoh-N. Maru-M. S. -N. Ukita (2023)]

$$\left\langle A^a_\mu(t,p)A^b_\nu(s,-p)\right\rangle\Big|_{\text{pole}} = \left[\left(\delta_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu\right) + \xi p_\mu p_\nu\right] \frac{\delta^{ab}e^{-(t+s)p^2}}{(p^2)^2} \frac{g^4}{16\pi^2\varepsilon} \times$$

$$-3N_c + N_f$$



$$+3N_c$$

$$-N_f$$

$$+N_c - N_c + 0$$

合計 $0 + 0 + 0$

ゲージ多重項の結果を整理する

超対称でないフローではアンバランス

$$A_\mu(t,x) = A_{R,\mu}(t,x), \quad \lambda(t,x) = Z_\lambda^{1/2}\lambda_R(t,x)$$

超対称フローでは対等な扱いができる

$$A_\mu(t,x) = A_{R,\mu}(t,x), \qquad \lambda(t,x) = \lambda_R(t,x)$$

物質多重項の発散構造の変化

境界の発散はアンバランス

$$Z_\varphi = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon}(1-\xi)C_F,$$

$$Z_\psi = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon}(-1-\xi)C_F.$$

超対称フローでは対等な扱い

$$Z_{\varphi,\psi,G} = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon}2C_F.$$

まとめ：超場フローは超対称性を尊重できる

1. フロー（物理量の新定式化）を使いたいが、超対称理論にそのまま使うとややこしい
2. 超場のグラディエントで超対称フロー方程式
3. $\mathcal{N}=1$ 超対称 QCD で 1 ループ計算した

$$V(t,x) = V_R(t,x) \qquad (V = A_\mu,\ \lambda,\ D),$$

$$F(t,x) = Z_F^{1/2} F_R(t,x) \qquad (F = \varphi_\pm,\ \psi_\pm,\ G_\pm),$$

$$Z_F = 1 + \frac{g^2}{16\pi^2\varepsilon} \times 2C_F.$$

展望：超対称理論とフローの理解を進める

1. SQCD の超対称フローを追究
   - 全次数における証明、超場形式での摂動論
   - カレントの定式化、格子計算
2. 明白にゲージ不変な厳密繰り込み群
   [Yamamura(2016), Abe-Fukuma(2018), Sonoda-H.Suzuki(2019), Miyakawa(2022)]
3. AdS 時空（計量）の現れ
   [Aoki-Kikuchi-Onogi(2015), Aoki-Yokoyama-Yoshida(2019)]
4. $\mathcal{N} = 2, 4$ の理論への拡張