素粒子現象論研究会 2022
2023/3/18

$T^2/\mathbb{Z}_N$ オービフォールドにおける指数と巻き付き数

今井 広紀
（神戸大学　素粒子理論研究室）

この講演は，坂本眞人氏，竹内万記氏，龍田佳幸氏との共同研究に基づく
H.Imai, M.Sakamoto, M.Takeuchi, and Y.Tatsuta, Index and winding numbers on $T^2/\mathbb{Z}_N$ orbifolds with magnetic flux, arXiv:2211.15541 (hep-th) (2022)

目次

背景：世代数問題

■研究の動機…世代数問題

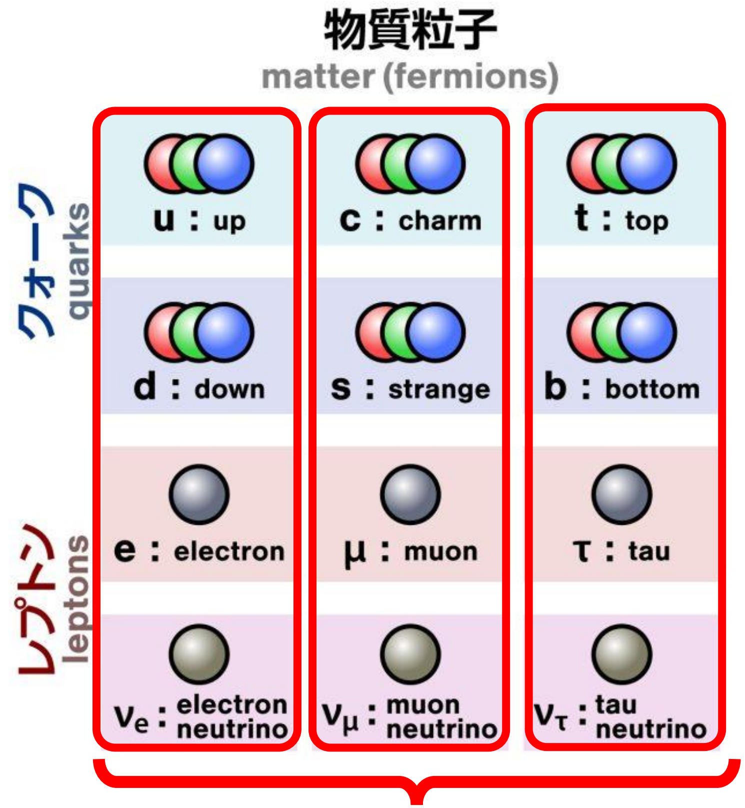
標準模型では3世代が
説明なしに与えられる

世代数の起源は謎のまま

自然に説明したい

有力な候補

2次元の**余剰次元**模型



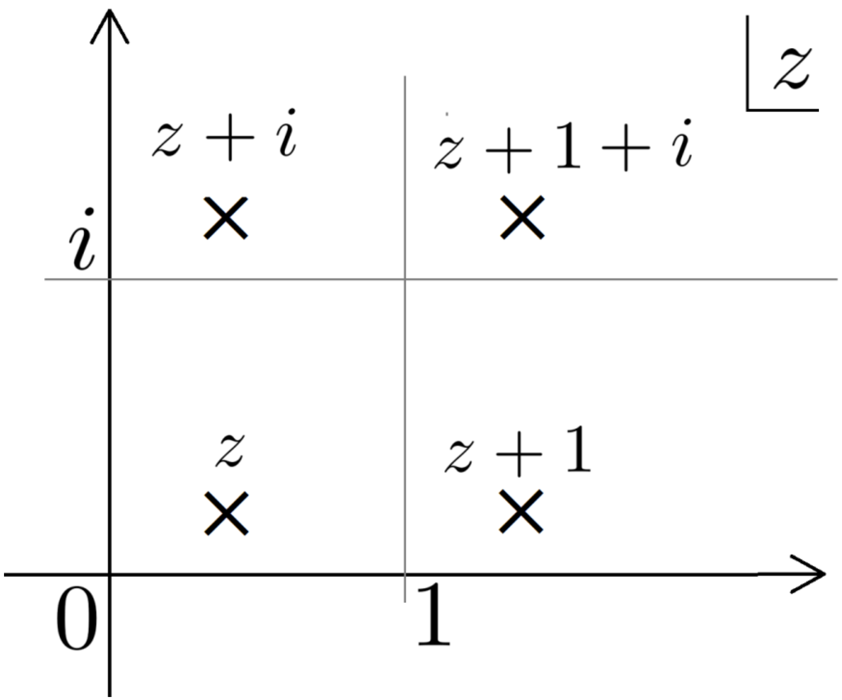
質量の違いを除けば,
まったく同じ粒子が3種類

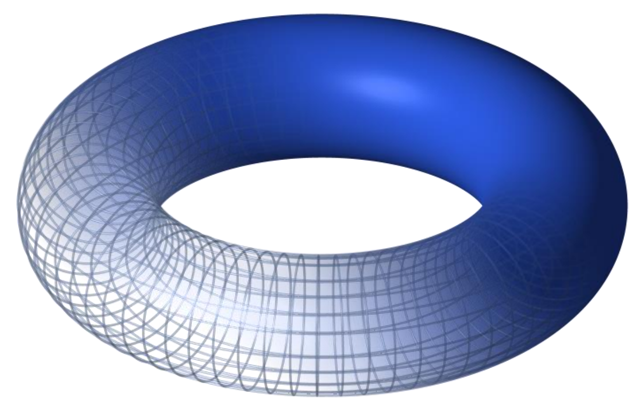
図：https://higgstan.com/standerd-model/

セットアップ：オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$

■今回考える模型… $T^2/\mathbb{Z}_N$

①トーラス T^2: zと$z+1$と$z+i$を同一視



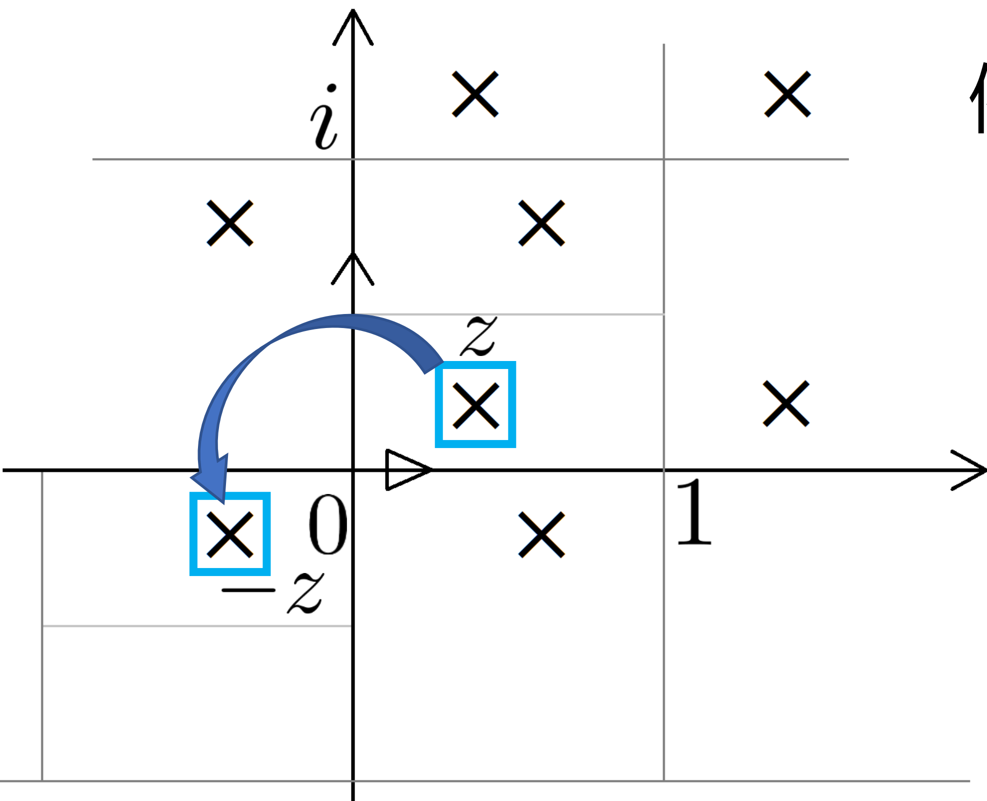


セットアップ：オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$

■今回考える模型… $T^2/\mathbb{Z}_N$

①トーラス T^2: $\boxed{z \text{と} z+1 \text{と} z+i}$を同一視

②オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$：さらにzと$\boxed{e^{2i\pi/N}z}$を同一視



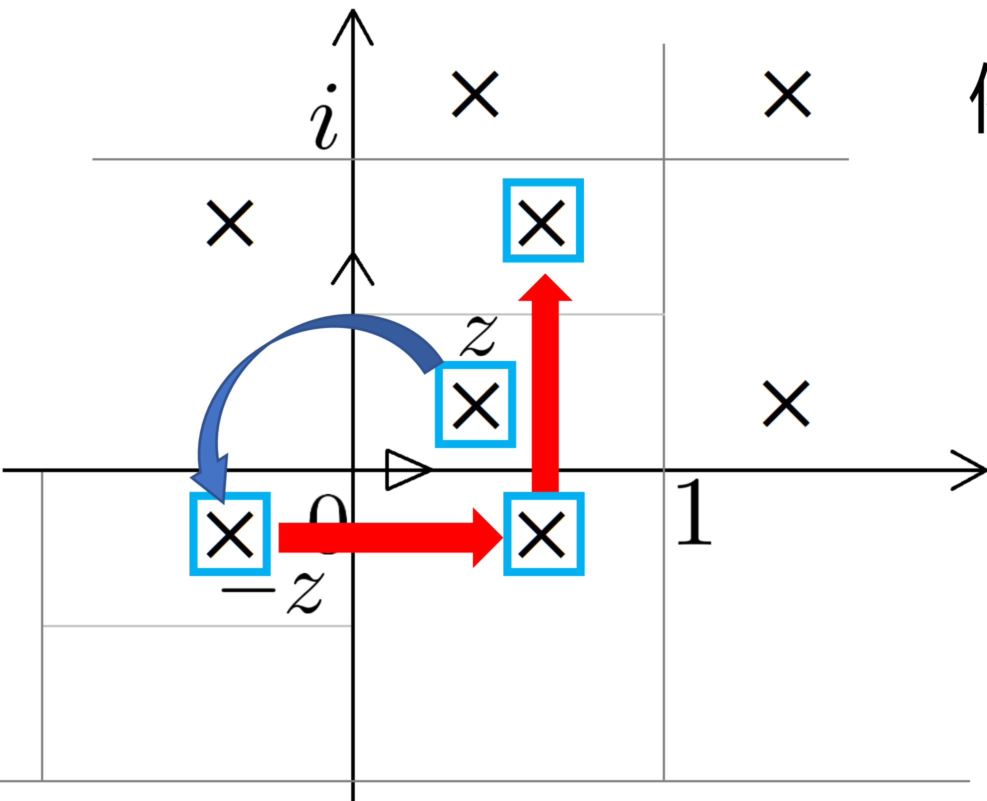
例：$N=2$… zと$\boxed{-z}$を同一視

セットアップ：オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$

■今回考える模型… $T^2/\mathbb{Z}_N$

①トーラス T^2: $\boxed{z\text{と}z+1\text{と}z+i}$を同一視

②オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$：さらにzと$\boxed{e^{2i\pi/N}z}$を同一視



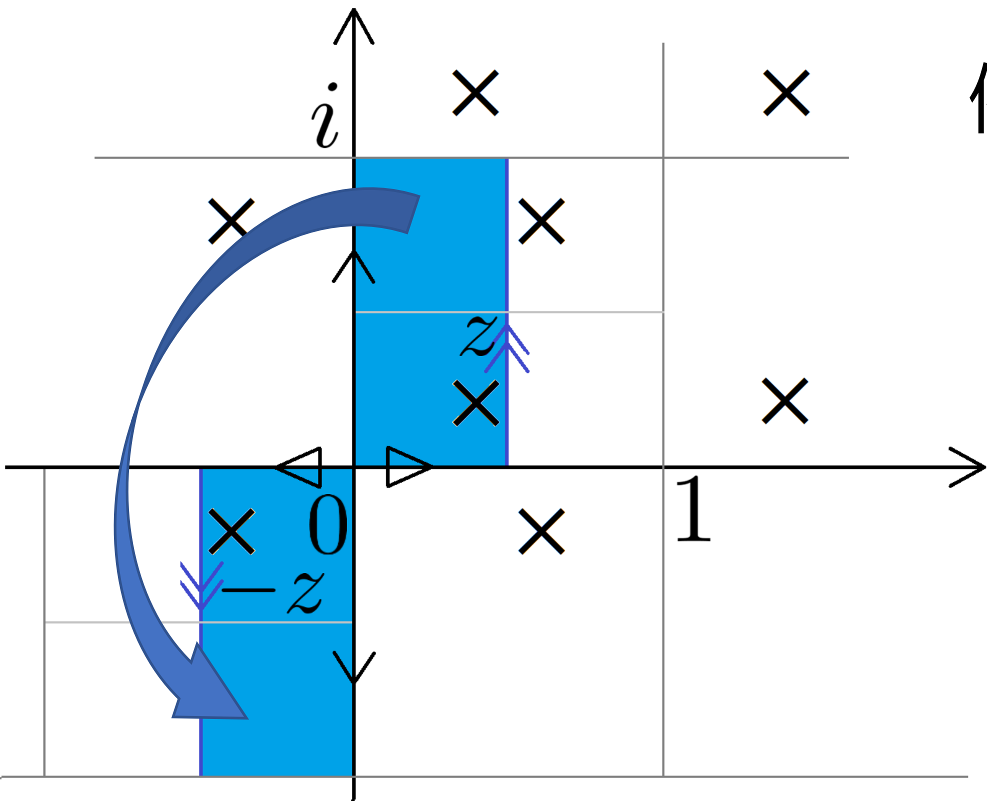
例：$N=2$… zと$\boxed{-z}$を同一視

セットアップ：オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$

■今回考える模型… $T^2/\mathbb{Z}_N$

①トーラス T^2: $\boxed{z\text{と}z+1\text{と}z+i}$を同一視

②オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$：さらにzと$\boxed{e^{2i\pi/N}z}$を同一視



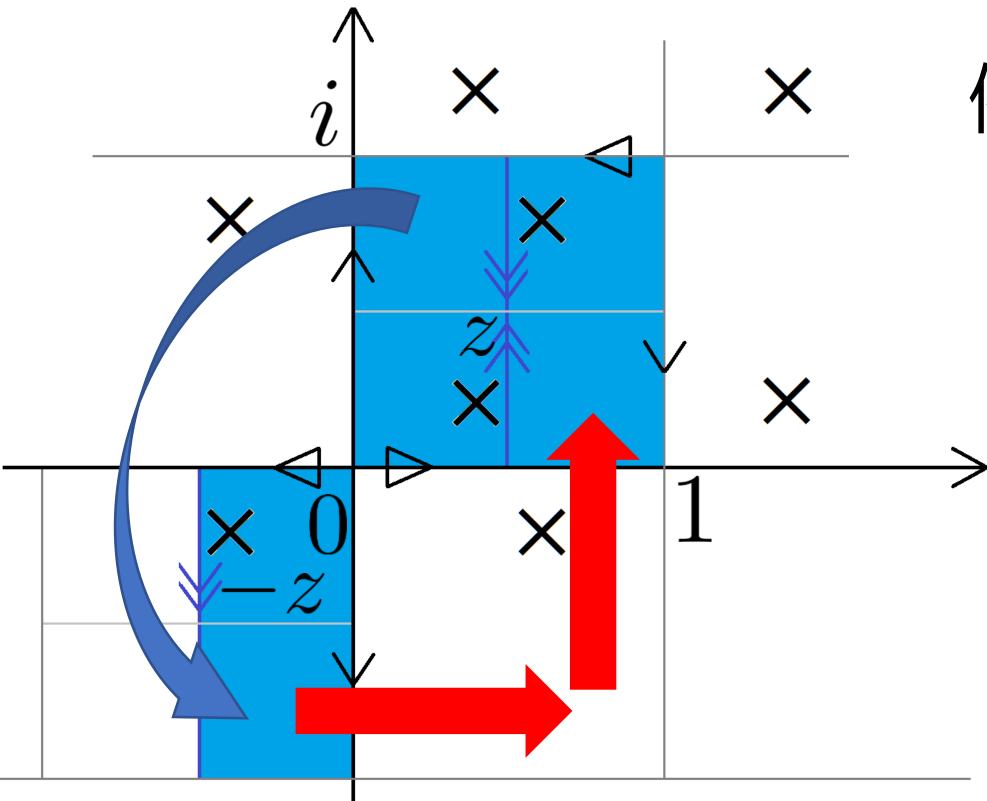
例：$N=2$… $\boxed{z\text{と}-z\text{を同一視}}$

セットアップ：オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$

■今回考える模型… $T^2/\mathbb{Z}_N$

①トーラス T^2: $\boxed{z\text{と}z+1\text{と}z+i}$を同一視

②オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$：さらにzと$\boxed{e^{2i\pi/N}z}$を同一視



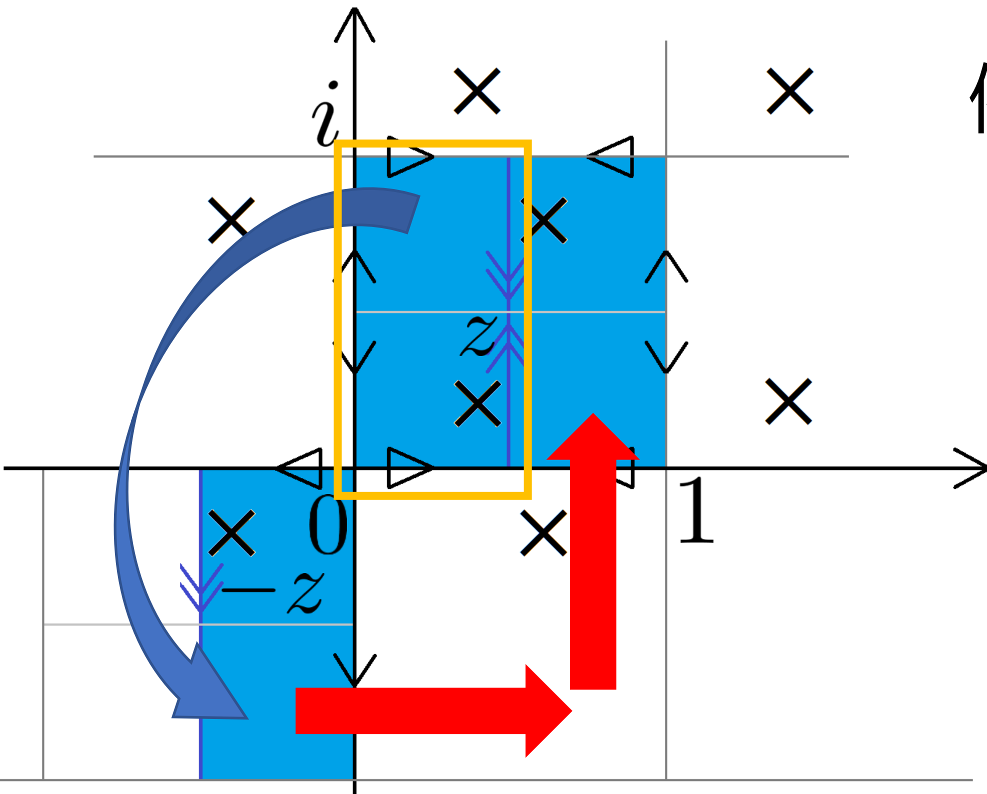
例：$N=2$… $\boxed{z\text{と}-z}$を同一視

セットアップ：オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$

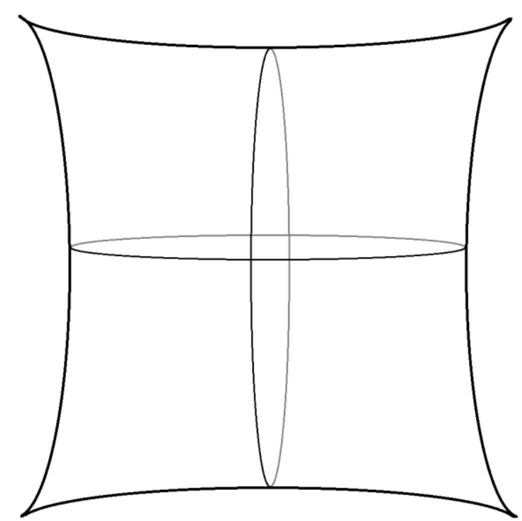
■今回考える模型… $T^2/\mathbb{Z}_N$

①トーラス T^2: $\boxed{z と z+1 と z+i}$ を同一視

②オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$:さらに z と $\boxed{e^{2i\pi/N}z}$ を同一視

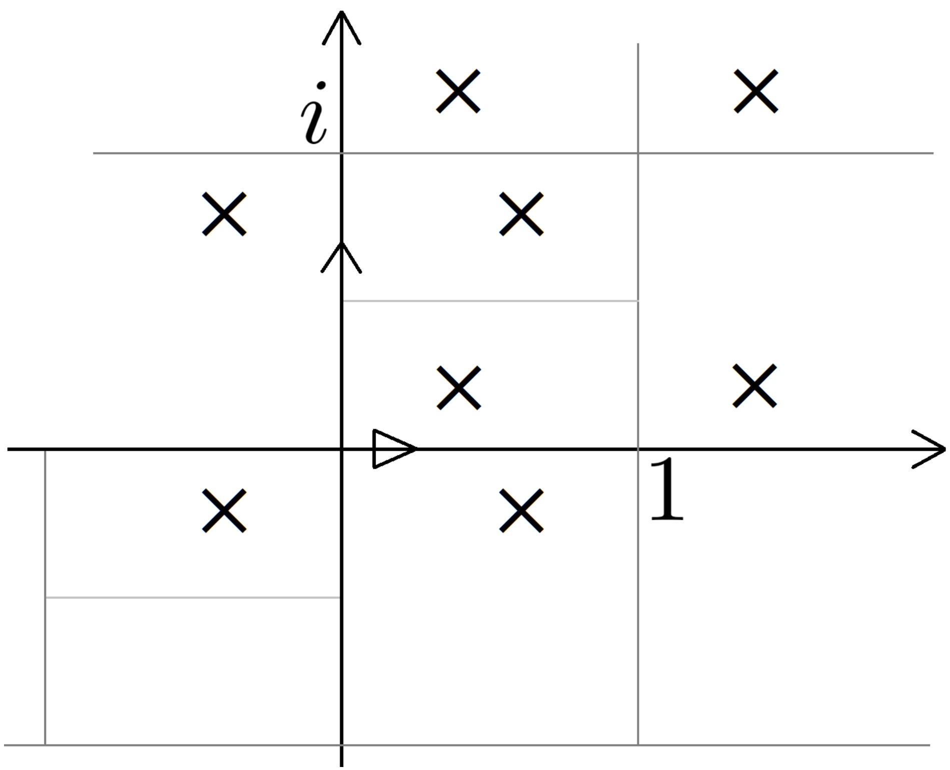


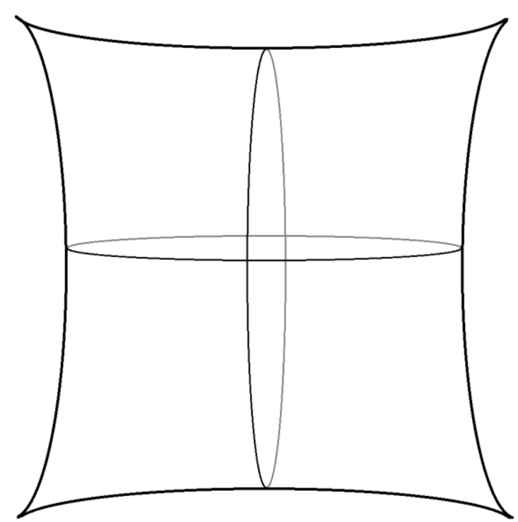
例: $N=2$… $\boxed{z と -z}$ を同一視



セットアップ：オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$

■このままでは世代数を説明できない





セットアップ：オービフォールド $T^2/\mathbb{Z}_N$

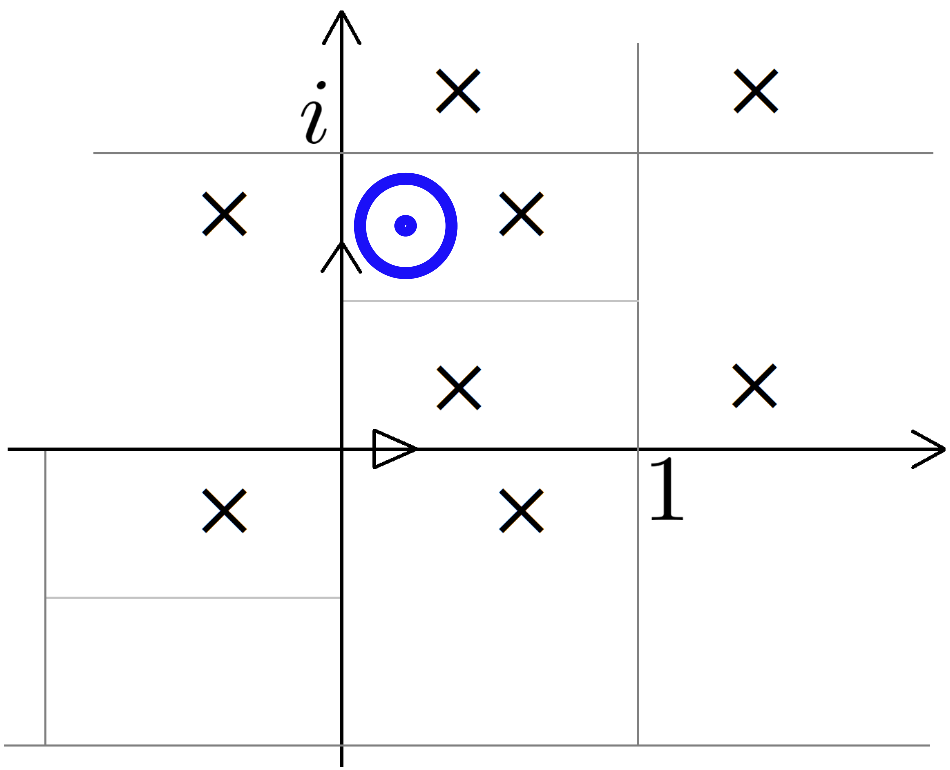
■このままでは世代数を説明できない

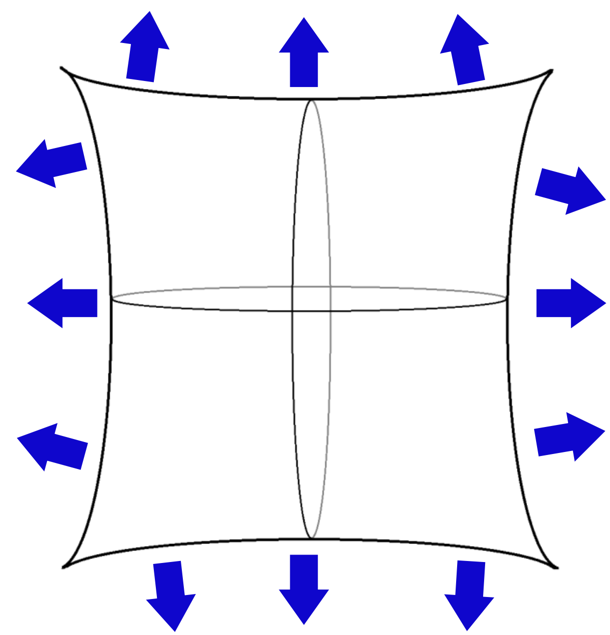
➡ 一様磁束 f をかける

q：物質の電荷

$T^2/\mathbb{Z}_N$ は有限領域 ➡ 磁束は量子化：$\dfrac{qf}{2\pi} = M \in \mathbb{Z}$

磁束量子化数





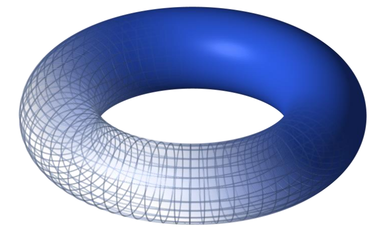
背景：指数定理

■ T^2 模型における世代数

一様磁場

$$\underbrace{\text{ゼロモード数}}_{\text{世代数}} = \underbrace{\frac{q}{2\pi}\int_{T^2} d^2z\, B}_{f} = M$$

Atiyah-Singerの指数定理



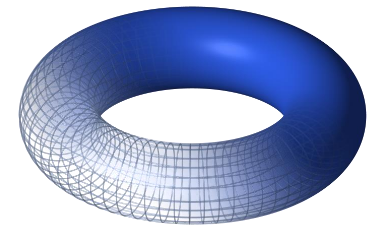
背景：指数定理

- T^2 模型における世代数

$$\underbrace{\textbf{ゼロモード数}}_{\textbf{世代数}} = \frac{q}{2\pi}\underbrace{\int_{T^2} d^2z}_{f}\, B = M$$

一様磁場

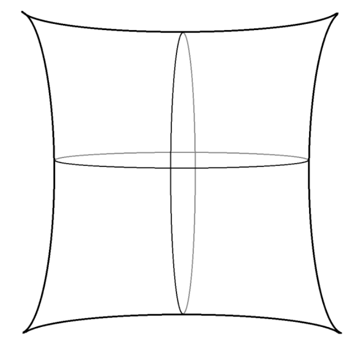
Atiyah-Singerの指数定理



- $T^2/\mathbb{Z}_N$ 模型における世代数

$$\textbf{ゼロモード数} \overset{?}{=} \frac{q}{2\pi}\underbrace{\int_{T^2/\mathbb{Z}_N} d^2z}_{\frac{1}{N}\int_{T^2} d^2z}\, B = \frac{M}{N}$$

T^2 模型の類推



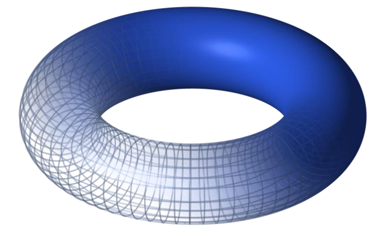
背景：指数定理

■ T^2 模型における世代数

一様磁場

$$\underbrace{\text{ゼロモード数}}_{\text{世代数}} = \frac{q}{2\pi}\underbrace{\int_{T^2} d^2z\, B}_{f} = M$$

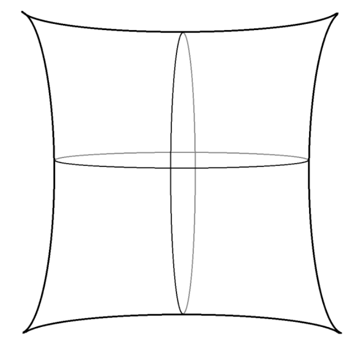
Atiyah-Singerの指数定理



■ $T^2/\mathbb{Z}_N$ 模型における世代数

$$\cancel{\text{ゼロモード数} \overset{?}{=} \frac{q}{2\pi}\underbrace{\int_{T^2/\mathbb{Z}_N} d^2z\, B}_{\frac{1}{N}\int_{T^2} d^2z} = \frac{M}{N}}$$

T^2 模型の類推



正しくない

背景：指数定理

■ なぜダメか？

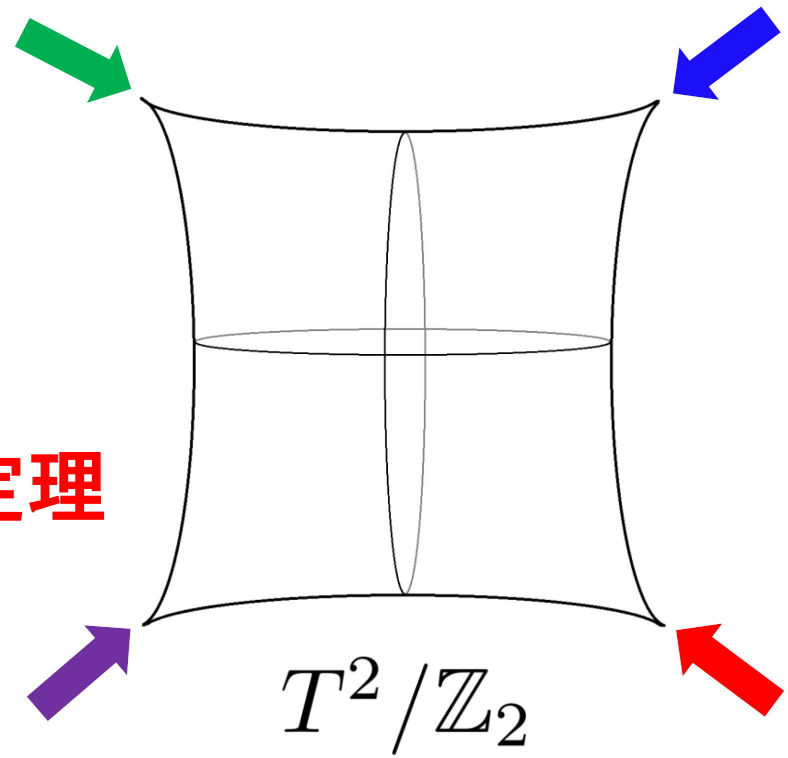
$$\textbf{ゼロモード数} \neq \frac{M}{N}$$

・$\dfrac{M}{N}$は整数とは限らない

例：$N=2$ でMが奇数の場合

・$T^2/\mathbb{Z}_N$には特異点がある

特異点があると，
Atiyah-Singerの指数定理
は適用できない



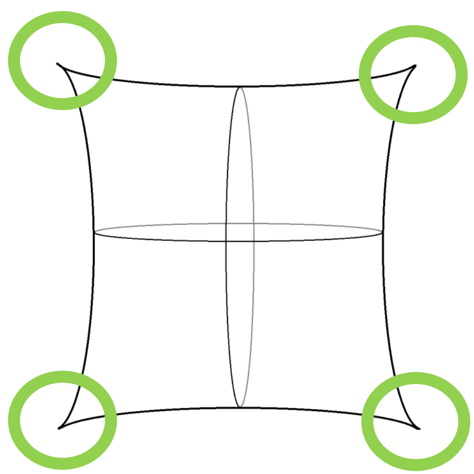
研究の目的

■ $T^2/\mathbb{Z}_N$ での指数定理

$$（\text{ゼロモード数}）=\frac{M}{N}+\boxed{\frac{-V_+ + V_-}{2N}}$$

$V_\pm$:特異点における物質場の巻き付き数（の合計）

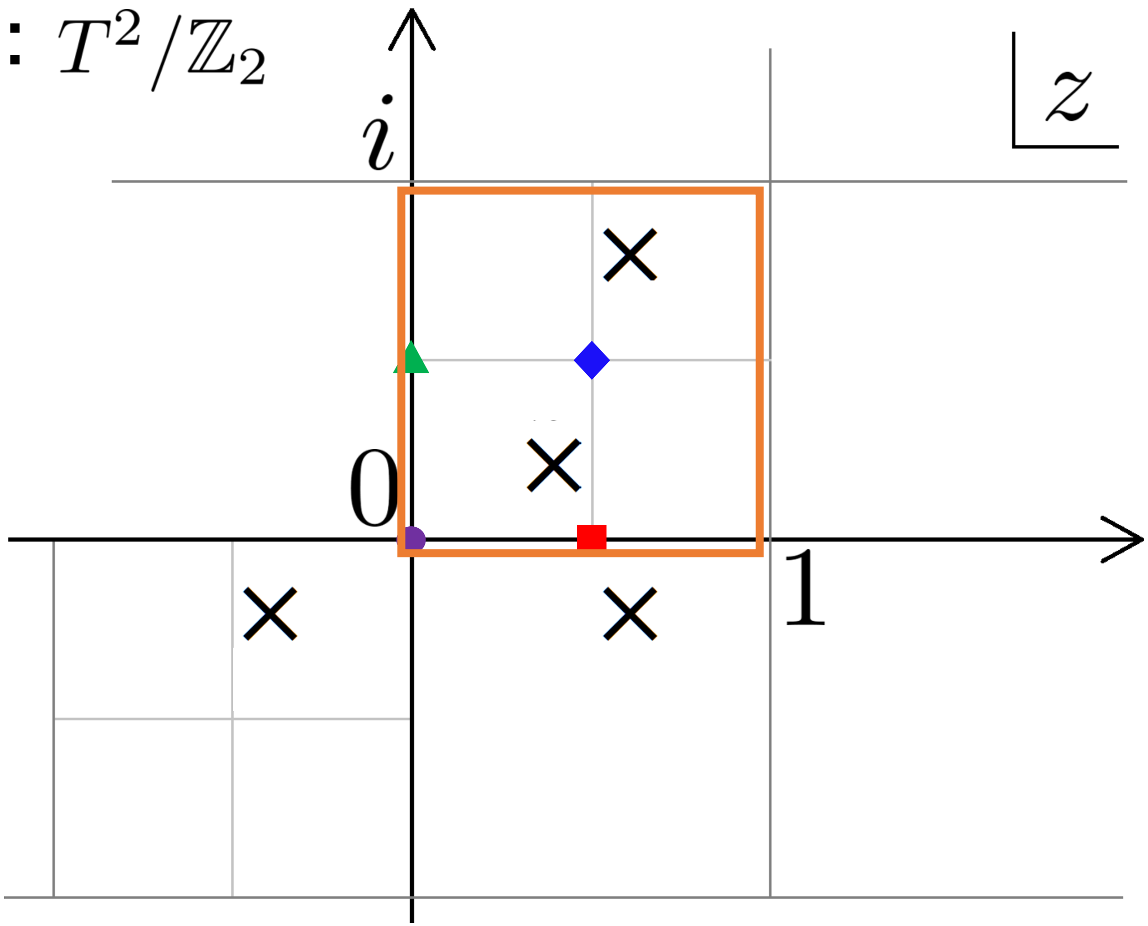
を導出する

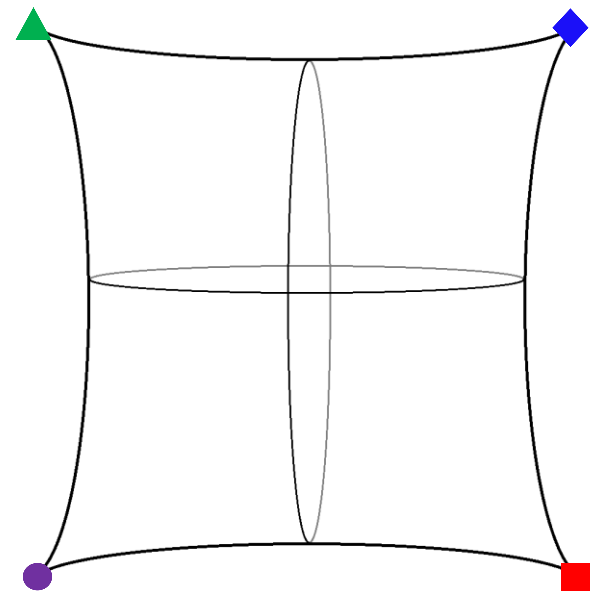


指数定理の導出(準備):固定点

$T^2/\mathbb{Z}_N$ には**固定点**という特異点が存在

例: $T^2/\mathbb{Z}_2$





× ：通常の点 ← トーラスとして2つの点

● ■ ▲ ◆ ：固定点 ← トーラスとして1つの点

指数定理の導出(準備):ゼロモード

■ 6次元カイラルフェルミオンを1つ導入

$$\Psi(x,z)=\sum_{n,j}\Big[\underbrace{\psi^{(4)}_{\mathrm{R},n,j}(x)}_{\text{4次元右巻きフェルミオン}}\otimes\underbrace{\psi^{(2)}_{+,n,j}(z)}_{\text{2次元正カイラリティフェルミオン}}+\underbrace{\psi^{(4)}_{\mathrm{L},n,j}(x)}_{\text{4次元左巻きフェルミオン}}\otimes\underbrace{\psi^{(2)}_{-,n,j}(z)}_{\text{2次元負カイラリティフェルミオン}}\Big]$$

n:質量スペクトル
$(n=0 \Longleftrightarrow m_n=0)$
j:nに対する縮退を区別するラベル

クォーク・レプトンは本来質量0の粒子

ゼロモード:

$\psi^{(4)}_{\mathrm{R},0,j}(x) \Longleftrightarrow \psi^{(2)}_{+,0,j}(z)$: n_+ 個

$\psi^{(4)}_{\mathrm{L},0,j}(x) \Longleftrightarrow \psi^{(2)}_{-,0,j}(z)$: n_- 個

世代数=ゼロモード数= $n_+ - n_-$

指数定理の導出

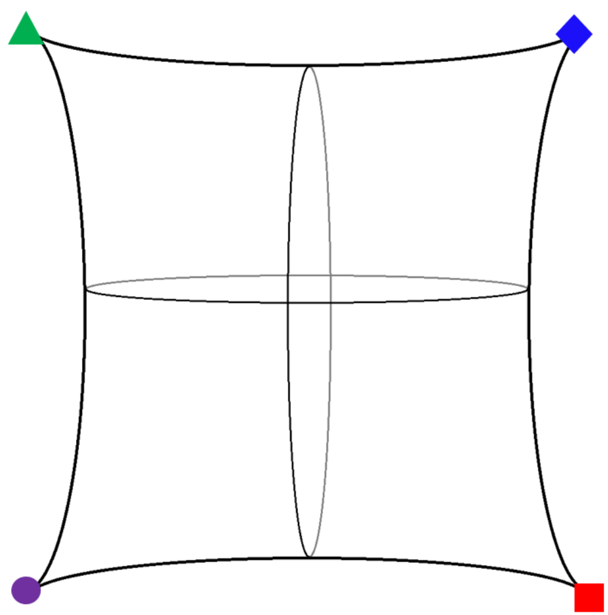
■ ゼロモード数＝指数

ゼロモード数$:= n_+ - n_-$

T^2の場合と同様に計算

$$= \boxed{\frac{M}{N}} + \boxed{\mathrm{tr}\left[\sigma_3\right]}$$

通常, 0になる



しかし, 特異点の存在のため
この項から寄与が現れる

指数定理の導出

$$\boxed{\mathrm{tr}\,[\sigma_3]} = \int_{T^2/\mathbb{Z}_N} d^2z \sum_{n,j} \left(\underbrace{\left[\psi^{(2)}_{+,n,j}(z)\right]^\dagger \psi^{(2)}_{+,n,j}(z)}_{\sigma_3\psi^{(2)}_{+,n,j}(z) = +\psi^{(2)}_{+,n,j}(z)} - \underbrace{\left[\psi^{(2)}_{-,n,j}(z)\right]^\dagger \psi^{(2)}_{-,n,j}(z)}_{\sigma_3\psi^{(2)}_{-,n,j}(z) = -\psi^{(2)}_{-,n,j}(z)} \right)$$

トレースを波動関数の完全系で展開

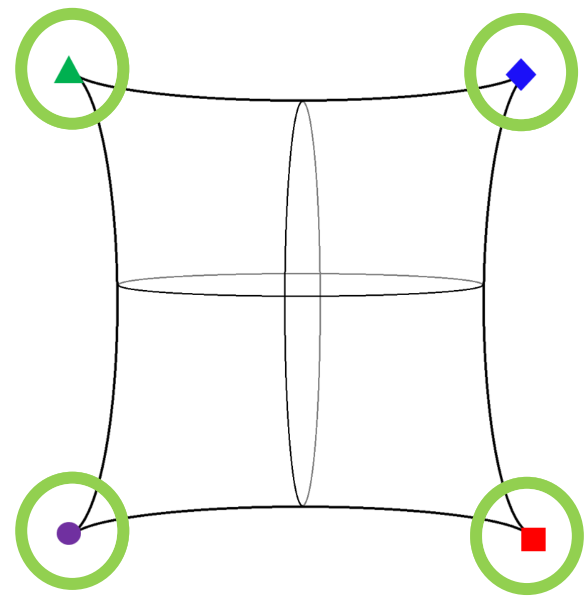
n :質量モード

j :縮退ラベル

ここから特異点(固定点)の寄与が現れる

$$\mathrm{tr}\,[\sigma_3] = \frac{1}{2N} \int_{T^2} d^2z \sum_{f=\bullet\,\blacksquare\,\blacktriangle\,\blacklozenge} W_f(z) \boxed{\delta^2(z - z_f)}$$

$$= \frac{1}{2N} \sum_f W_f(z_f)$$



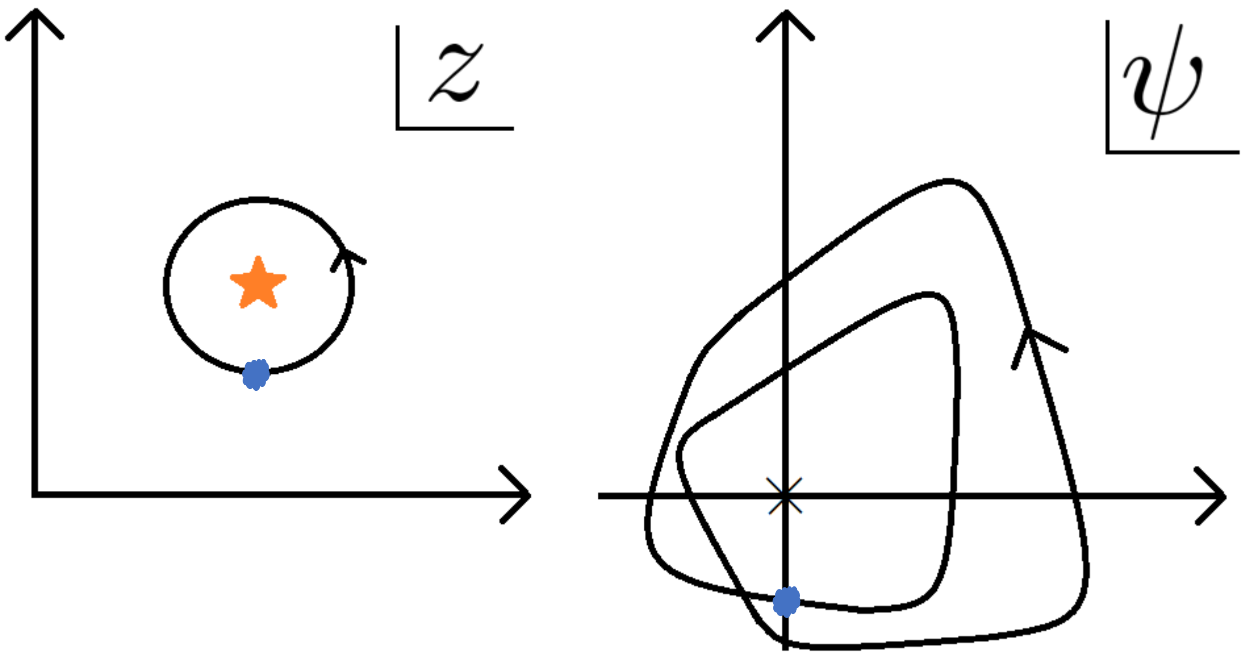
$W_f(z_f)$ とは？

指数定理の導出：巻き付き数

$W_f(z_f)$ は固定点における**巻き付き数**の差で,

$$W_f(z_f) = -\chi_{+,f} + \chi_{-,f}$$

と書ける. （$\chi_{\pm,f}$:固定点 z_f まわりの $\psi^{(2)}_{\pm,n,j}(z)$ の巻き付き数）



例：巻き付き数2

指数定理の導出：巻き付き数

$W_f(z_f)$ は固定点における**巻き付き数**の差で,

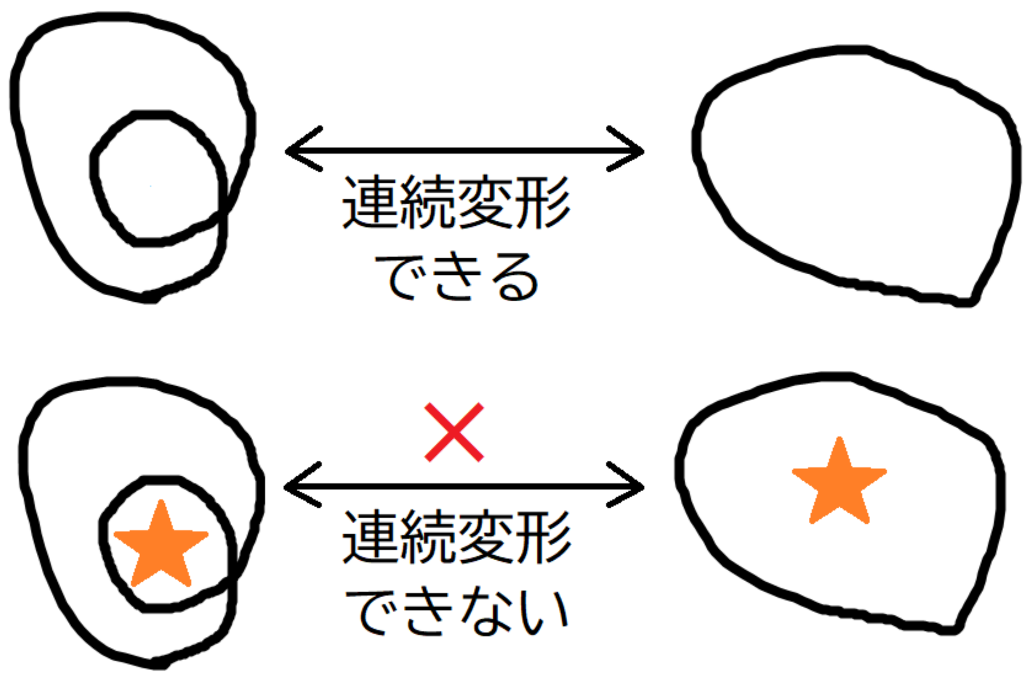
$$W_f(z_f) = -\chi_{+,f} + \chi_{-,f}$$

と書ける. （$\chi_{\pm,f}$:固定点 z_f まわりの $\psi^{(2)}_{\pm,n,j}(z)$ の巻き付き数）

固定点まわりの巻き付き数は,「ほどく」ことができない

固定点でない場所:

固定点:



意味なし

意味あり

指数定理の導出：巻き付き数

$W_f(z_f)$は固定点における**巻き付き数**の差で，

$$W_f(z_f) = -\chi_{+,f} + \chi_{-,f}$$

と書ける．（$\chi_{\pm,f}$:固定点z_fまわりの$\psi^{(2)}_{\pm,n,j}(z)$の巻き付き数）

$$\mathrm{tr}[\sigma_3] = \frac{1}{2N}\sum_f W_f(z_f) = \frac{1}{2N}\left(-\sum_f \chi_{+,f} + \sum_f \chi_{-,f}\right)$$

$$\Big\Downarrow \quad V_\pm = \sum_f \chi_{\pm f}$$

$$\boxed{\mathrm{tr}[\sigma_3] = \frac{1}{2N}(-V_+ + V_-)}$$

結果と展望

- 結論… $T^2/\mathbb{Z}_N$ における世代数の幾何的意味を導出

$$\underbrace{\text{ゼロモード数}}_{\text{世代数}} = n_+ - n_- = \boxed{\frac{M}{N}} + \boxed{\frac{1}{2N}(-V_+ + V_-)}$$

磁束の寄与　　固定点(特異点)の寄与

$$V_\pm = \sum_f \int_{T^2} d^2 z \, \boxed{\chi_{\pm f}} \, \delta^2(z - z_f)$$

固定点における巻き付き数

- $N = 2$ の場合は完全に導出

- $N = 3, 4, 6$ の場合の導出は(大部分が)未完結