ゲージヒッグス統一模型における ヒッグス場のポテンシャルの 高次摂動における発散

山田篤幸 (名古屋大学)
共同研究者: 久野純治 (名古屋大学，KMI，IPMU)

2020/11/27
@素粒子現象論研究会 2020

発表内容

1. イントロダクション
2. セットアップ
3. 計算手法
4. 1，2ループレベルでの有限性
5. 4ループレベルの発散
6. まとめ

イントロダクション

イントロダクション

- 素粒子標準理論 **(SM)** のダイナミクス

ゲージ原理

対称性 $\longrightarrow$ 相互作用

SM: $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$

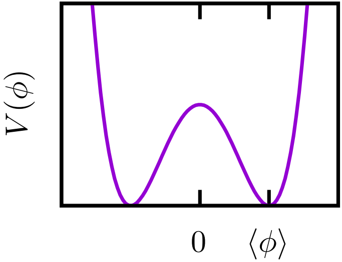
しかし，ゲージ場の質量を禁止.

ヒッグス機構

ヒッグス場の非零の真空期待値

(VEV) $\longrightarrow$ 対称性の破れ,

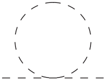
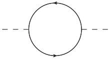
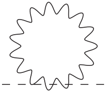
ゲージ場の質量



フェルミオンの質量 $\longrightarrow$ 湯川相互作用を用意.

イントロダクション (2)

- ヒッグス場の質量補正

$\delta m_h^2 =$  $+$  $+$  $+ \cdots \sim \Lambda^2$

$$(125\,\mathrm{GeV})^2 = \mathcal{O}((10^{18}\,\mathrm{GeV})^2) + \mathcal{O}((10^{18}\,\mathrm{GeV})^2)$$

$$m_h^2 \qquad\qquad m_0^2 \qquad\qquad \delta m_h^2$$

$\longrightarrow$ 30 桁以上の微調整が必要.

イントロダクション (3)

SM では説明できない:

- ヒッグスのワイン・ボトル型ポテンシャル
- 湯川相互作用 (自動的に現れるわけではない)

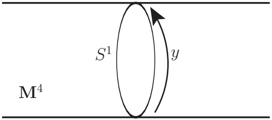
$\longrightarrow$ ヒッグス場の基本原理? 2 次発散の解消?

ゲージ・ヒッグス統合模型

イントロダクション (4)

- ゲージ・ヒッグス統合 (GHU)

5 次元時空 $\mathbf{M}^4 \times S^1$ 上の
ゲージ理論を考える.
ゲージ場 $A_M(x,y)$,
$M = 0,1,2,3,5.$
R: S^1 の半径.



x: 4d ミンコフスキー時空の座標
y: 円周 S^1 の座標 $\in [0, 2\pi R)$

ゲージ・ヒッグス統合

ヒッグス場 = ゲージ場の余剰次元成分 (A_5).

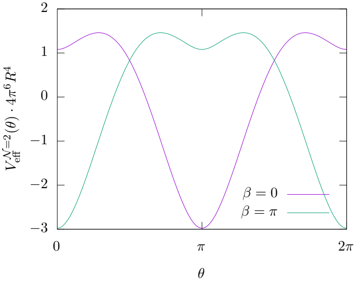
Aharonov-Bohm (AB) 位相 $\theta = g \oint_{S^1} \mathrm{d}y\, A_5 = 2\pi R g \langle A_5 \rangle$,
g: ゲージ結合定数.

イントロダクション (5)

- 湯川相互作用はゲージ原理から得られる.

$$\mathcal{L}_{fermion} = \bar{\psi} i \gamma^M (\partial_M - igA_M)\psi,$$

- ゲージ対称性によりツリー・レベルでポテンシャルはない.
  $\longrightarrow$ パラメータの微調整は必要なくなる (2 次の項が書けない).
  $\longrightarrow$ 量子効果から有効ポテンシャルが生成 (細谷機構).



場の境界条件 ($\beta \in [0, 2\pi)$):

$$\psi(x^\mu, y + 2\pi R) = e^{i\beta}\psi(x^\mu, y)$$

$\longrightarrow$ 境界条件 (β) によってポテンシャルの概形が変化する.
非零の VEV を持つとき，対称性が破れる (細谷機構).

イントロダクション (6)

- ヒッグス・ポテンシャルの有限性

非可換ゲージ理論 @ one-loop:

- $SU(\mathcal{N})$ on $\mathbf{M}^3 \times S^1$ [Hosotani, 1983]
- $SU(\mathcal{N})$ on $\mathbf{M}^{d-1} \times S^1$ [Hosotani, 1989]
- 半単純群 on $\mathbf{R}^3 \times S^1$ [Davies & McLachlan, 1989]

予想 [Gersdorff, Irges, Quiros, 2002; Hosotani, 2005]

GHU ではヒッグス・ボソンの有効ポテンシャル (ヒッグス・ポテンシャル)$V_{\mathit{eff}}(\theta)$ は摂動の全次数で有限.

$d \geq 5$ 次元以上のゲージ理論は繰り込み不可能.
→ 有限ならば，ヒッグスの質量 $m_h^2 \propto \frac{\mathrm{d}^2 V_{\mathit{eff}}(\theta)}{\mathrm{d}\theta^2}$ などに発散による不定性が現れず，高い予言能力がある.

イントロダクション (7)

- より高次での有限性の確認

$U(1)$ ゲージ理論 @ two-loop:

$\mathbf{M}^4 \times S^1$ [Maru & Yamashita, 2006; Hosotani et al., 2007]

- これまでの我々の結果 [J.Hisano, Y.Shoji, AY, 2019]
    - $SU(\mathcal{N})$ on $\mathbf{M}^4 \times S^1$ @ one/two-loop: 有限
    - $SU(\mathcal{N})$ on $\mathbf{M}^5 \times S^1$ @ three-loop: 発散
- 今回の発表内容

$SU(\mathcal{N})$ on $\mathbf{M}^4 \times S^1$ @ four-loop: 発散

イントロダクション (8)

“発散” の定義

$V_{\mathit{eff}}(\theta)$ がゲージ結合定数への相殺項で引き去れない発散に依存

GHU は高次元のゲージ理論 $\longrightarrow$ 繰り込み不可能

無限に相殺項を加えられるので，有限個の相殺項で引き去れない
発散があることを適当な基準で示す.

発表内容

セットアップ

- 5 次元 $SU(N)$ ゲージ理論

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{gauge} + \mathcal{L}_{fermion} \,,$$

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4} F^a_{MN} F^{aMN}, \qquad \mathcal{L}_{fermion} = \bar{\psi} i \gamma^M (\partial_M - igA_M)\psi,$$

$\langle A_5^a \rangle = \dfrac{\theta^a}{2\pi R g}$ としてヒッグス・ポテンシャルを計算する.

セットアップ (2)

- 境界条件

$$A_M(x, y + 2\pi R) = A_M(x, y), \quad y \in [0, 2\pi R),$$

$$\psi(x, y + 2\pi R) = e^{i\beta}\psi(x, y), \quad \beta \in [0, 2\pi).$$

カルツァ・クライン (KK) モード展開:

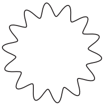
$$A_M(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_M^{(n)}(x)\, e^{iny/R},$$

$$\psi(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi^{(n)}(x)\, e^{i(n/R+\beta/2\pi R)y}.$$

発表内容

計算手法

- ループ積分における困難



$$= -\frac{5}{2}\frac{1}{2\pi R}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbf{M}^4}\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\ln\left[k^2-\left(\frac{n}{R}+\frac{\theta^a T^a}{2\pi R}\right)^2\right]$$

T^a: 随伴行列

1. 行列の対角化 $\rightarrow$ 大量のダイアグラム
2. 積分の実行

$\longrightarrow$ よりシンプルに計算したい.

計算手法 (2)

- 重ね合わせコンパクト化

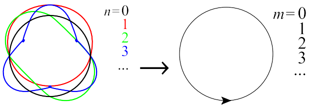
[Da Rold, 2003; Anber & Sulejmanpasic, 2015; Heffner & Reinhardt, 2015]

$$\frac{1}{2\pi R}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbf{M}^4}\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}S\left(\frac{n}{R}+\frac{\Theta}{2\pi R}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{i\Theta m}\int_{\mathbf{M}^5}\frac{\mathrm{d}^5 k}{(2\pi)^5}e^{-i2\pi R k_5 m}S(k_5)$$

S: 解析的関数 (ln など), Θ: エルミート行列 (T^a など).

cf. Poisson resummation formula:

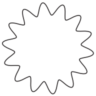
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\left(k_5-\frac{n}{R}\right)=R\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-i2\pi R k_5 m}$$



KK 展開 → S^1 を m 周する自身との重ね合わせ (m: 巻き付き数)

計算手法 (3)

ループ積分の再考:



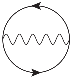
$$= -\frac{5}{2}\frac{1}{2\pi R}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\mathbf{M}^4}\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{tr}\ln\left[k^2-\left(\frac{n}{R}+\frac{\theta^a T^a}{2\pi R}\right)^2\right]$$

$$= -\frac{5}{2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{tr}\, e^{i\theta^a T^a m}\int_{\mathbf{M}^5}\frac{\mathrm{d}^5 k}{(2\pi)^5}e^{-i2\pi R k_5 m}\ln\left[k^2-(k_5)^2\right]$$

$$= -\frac{3i}{128|m|^5\pi^7 R^5}\quad (m\neq 0)$$

計算手法 (4)

さらに，2 ループ・レベルでは，

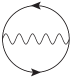


$$= \frac{1}{2}\frac{1}{2\pi R}\sum_{n_1}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{1}{2\pi R}\sum_{n_2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left[\frac{-i\eta_{MN}}{p^2-(\frac{n_1}{R}+\frac{\theta^c T^c}{2\pi R})^2}\right]_{ab}$$

$$\times(-1)\,\mathrm{tr}\left[\frac{i}{\not{p}+\not{k}-\gamma_5(\frac{n_1+n_2}{R}+\frac{\theta^c\tau^c-\beta}{2\pi R})}ig\gamma^M\tau^a\right.$$

$$\left.\times\frac{i}{\not{k}-\gamma_5(\frac{n_2}{R}+\frac{\theta^c\tau^c-\beta}{2\pi R})}ig\gamma^N\tau^b\right].$$

計算手法 (5)



$$= -6ig^2 \sum_{m_1,m_2} \left[e^{i\theta^c T^c m_1} \right]_{ab} \mathrm{tr} \left[e^{i(\theta^c \tau^c - \beta) m_2} \tau^b \tau^a \right]$$
$$\times \int \frac{d^5 p}{(2\pi)^5} \int \frac{d^5 k}{(2\pi)^5} e^{-i2\pi R(p_5 m_1 + k_5 m_2)}$$
$$\times \frac{(p+k)^M k_M}{p^L p_L (p+k)^J (p+k)_J k^I k_I}.$$

重ね合わせコンパクト化: 非常に強力!

発表内容

1，２ループレベルでの有限性

- **1 ループレベル**

[Hosotani, 1983, 1989; Davies & McLachlan, 1989]

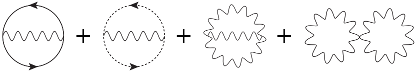
$$V_{\mathit{eff}}^{1L} = -\frac{9}{256\pi^7 R^5}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{|m|^5}\,\mathrm{tr}\,e^{i\theta^a T^a m} + \frac{3}{64\pi^7 R^5}\sum_{\ell}\sum_{m\neq 0}\frac{1}{|m|^5}\,\mathrm{tr}\,e^{i(\theta^a\tau_\ell^a-\beta_\ell)m} + C$$

τ_ℓ^a: フェルミオンの表現，ℓ: フレーバーの添字,
C: θ 非依存の定数 ($m=0$ の寄与).

1, 2ループレベルでの有限性 (2)

- **2 ループレベル**

$$V_{eff}^{2L}(\theta) = i \times \Big($$



$$\Big)$$

$$= -3g^2 \sum_{\ell} \sum_{m_1, m_2} G_\ell(m_1, m_2)[2F(m_1)F(m_2) - F(m_1)F(m_1 - m_2)]$$

$$+ \frac{9}{4} g^2 \sum_{m_1, m_2} G_{adj}(m_1, m_2) F(m_1) F(m_2),$$

$$F(m) = \begin{cases} \frac{1}{64\pi^5 |m|^3 R^3} & (m \neq 0) \\ 0 & (m = 0) \end{cases}$$

$$G_\ell(m_1, m_2) = [e^{i\theta^c T^c m_1}]_{ba} \operatorname{tr}[e^{i(\theta^c \tau_\ell^c - \beta) m_2} \tau_\ell^a \tau_\ell^b]$$

$$G_{adj}(m_1, m_2) = [e^{i\theta^c T^c m_1}]_{ba} \operatorname{tr}[e^{i\theta^c T^c m_2} T^a T^b]$$

先行研究 [Maru & Yamashita, 2006; Hosotani et al., 2007] と整合的.

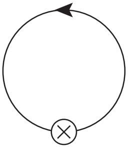
1，２ループレベルでの有限性 (3)

- なぜ有限になったか
  - ヒッグス場は non-local operator; $\theta = g \oint_{S^1} \mathrm{d}y A_5$

    $\longrightarrow$ ヒッグスを "感じる" には $2\pi Rm$ だけ距離が必要; $e^{-i2\pi Rk_5 m}$.

    $\longrightarrow$ ゼロ距離に由来する紫外発散が現れない.

1，２ループレベルでの有限性 (4)

-  からの寄与?

$\longrightarrow$ 波動関数繰り込みがプロパゲータの逆行列になり，θ 依存性を打ち消し合う;

$$= \frac{i}{\not{p} - \gamma_5\left(\frac{n}{R} + \frac{\theta^c \tau_l^c - \beta_\ell}{2\pi R}\right)}$$

$$= i\delta_2\left[\not{p} - \gamma_5\left(\frac{n}{R} + \frac{\theta^c \tau_l^c - \beta_\ell}{2\pi R}\right)\right].$$

発表内容

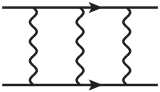
4 ループレベルの発散

時空: $\mathbf{M}^4 \times S^1$，ゲージ群: $SU(N)$.

次元正則化で 4 フェルミ・オペレータを 2 ループ・レベルで計算.

$\rightarrow \theta$ に依存する 対数発散 として $V_{eff}(\theta)$ に寄与することを確認.

e.g.



$\propto \frac{1}{\epsilon}$.

- 少なくともゲージ結合定数だけでは発散は消せない.
- どれだけの相殺項が必要か? [今後の課題]
  (有限個で足りる? 無限個いる？)

まとめ

- 繰り込み不可能な理論でありながら，GHU において，ヒッグス・ポテンシャルの有限性が 2 ループ・レベルまでで示されてきた．
- 一方で，より高次の摂動におけるヒッグス・ポテンシャルの発散の構造は明らかにされていない．
- 4 フェルミ・オペレータが発散すると今回示され，ゲージ結合定数だけでは繰り込めない発散がヒッグス・ポテンシャルに少なくとも存在することがわかった．
- しかし，どのような相殺項を導入すれば発散を引き去れるのか (またはできないのか)，GHU におけるヒッグス・ポテンシャルに関してわからないことはまだある．