

Is Symmetry Breaking into Special Subgroup Special?

九州大学 大学院 理学研究院 物理学部門

Department of Physics, Kyushu University

山津 直樹

Naoki Yamatsu

素粒子現象論研究会 2020 (@ 大阪市立大学 + オンライン)

2020年11月26日-28日

共同研究：九後汰一郎 (京都大学 基礎物理学研究所)

Refs. [1, 2, PTEP(2019),073B06;(2020),023B09]

今回の講演の目的

リー群の **特殊部分群** への破れは特別ではないことを説明したい．具体例として，四次元南部-Jona-Lasinio(NJL) 模型 [3,4, Y.Nambu,G.Jona-Lasino'61] を用いた力学的対称性の破れの解析結果を示す．

今回の講演内容

- リー群の **特殊部分群** への破れを用いた大統一理論
- 力学的対称性の破れを用いた **特殊部分群** への対称性の破れ

キーワード：リー群の {(非)最大} {正則, 特殊} {部分群, 小群}

標準理論を越える統一理論を考える動機

素粒子標準理論を見てみるといくつかの意味不明なことがある。

- なぜゲージ対称性は $G_{\text{SM}} := SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$?
- なぜクォークとレプトンは G_{SM} の定義または自明な表現?
- なぜクォークとレプトンは三世代もあるのか?
- なぜクォークやレプトンの質量(湯川結合定数)は階層的?

...

大統一理論を考える動機 [5, 6, R.Slansky'81;...]

標準理論の背後に大統一理論が隠れていると考えたと、

- 標準理論のゲージボソンの統一
 - 標準理論のワイルフェルミオンの統一
 - 四次元の標準理論の量子異常の相殺
 - クォークとレプトンの電荷の量子化
- ...

標準理論の場と表現：標準理論

場	表記	$(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$	$SL(2, \mathbb{C})$
クォーク二重項	Q_j	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, +1/6)$	$(1/2, 0)$
アップタイプ	u_j^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)$	$(1/2, 0)$
ダウンタイプ	d_j^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, +1/3)$	$(1/2, 0)$
レプトン二重項	L_j	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)$	$(1/2, 0)$
荷電レプトン	e_j^c	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, +1)$	$(1/2, 0)$
ヒッグス	ϕ	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1/2)$	$(0, 0)$
グルーオン	G_A	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, \pm 0)$	$(1/2, 1/2)$
ウィーク	W_I	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \pm 0)$	$(1/2, 1/2)$
ハイパー	B	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \pm 0)$	$(1/2, 1/2)$

標準理論の場と表現：大統一

場	表記	$(SU(3)_C, SU(2)_L, U(1)_Y)$	$SL(2, \mathbb{C})$
クォーク二重項	Q_j	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, +1/6)$	$(1/2, 0)$
アップタイプ	u_j^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, -2/3)$	$(1/2, 0)$
ダウンタイプ	d_j^c	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, +1/3)$	$(1/2, 0)$
レプトン二重項	L_j	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, -1/2)$	$(1/2, 0)$
荷電レプトン	e_j^c	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, +1)$	$(1/2, 0)$
ヒッグス	ϕ	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, +1/2)$	$(0, 0)$
グルーオン	G_A	$(\mathbf{8}, \mathbf{1}, \pm 0)$	$(1/2, 1/2)$
ウィーク	W_I	$(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \pm 0)$	$(1/2, 1/2)$
ハイパー	B	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \pm 0)$	$(1/2, 1/2)$

大統一ゲージ群とその部分群への破れ

四次元大統一理論

$SU(5)$ [7, H.Georgi,S.L.Glashow'74] $SU(6)$ [8, K.Inoue,A.Kakuto,Y.Nakano'77]
 $SO(10)$ [9, H.Fritzsch,P.Minkowski'75] E_6 [10, F.Gursey,P.Ramond,P.Sikivie'76]

五次元大統一理論

$SU(5)$ [11, 12, K.Kojima et al.'11;...] $SU(6)$ [13, 14, G.Burdman,Y.Nomura'03;...]
 $SO(10)$ [15, 16, H.D.Kim,S.Raby'03;...] E_6 [17, 18, Y.Kawamura,T.Miura'13;...]
 $SO(11)$ [19–24, Y.Hosotani,N.Y.'15;...].

通常大統一ゲージ理論では以下のような正則部分群を用いる：

$$E_8 \supset E_7 \supset E_6 \supset SO(10) \supset SU(5) \supset G_{\text{SM}}.$$

しかしながら，リー群には **特殊部分群** (非正則部分群) がある。

正則部分群と特殊部分群の例 [5, 6, 25–27, E.Dynkin'57;...]

リー群 $SU(3)$

正則部分群

$$SU(2) \times U(1)$$

表現分解

$$\begin{aligned} \mathbf{3} &= (\mathbf{2})(1) \oplus (\mathbf{1})(-2) \\ \bar{\mathbf{3}} &= (\mathbf{2})(-1) \oplus (\mathbf{1})(2) \\ \mathbf{8} &= (\mathbf{3})(0) \oplus (\mathbf{2})(3) \\ &\quad \oplus (\mathbf{2})(-3) \oplus (\mathbf{1})(0) \end{aligned}$$

特殊部分群

$$SO(3) \simeq SU(2)$$

表現分解

$$\begin{aligned} \mathbf{3} &= (\mathbf{3}) \\ \bar{\mathbf{3}} &= (\mathbf{3}) \\ \mathbf{8} &= (\mathbf{5}) \oplus (\mathbf{3}) \end{aligned}$$

$SU(3) \supset SU(2) \times U(1) (R)$ [5, 6, 25–27, E.Dynkin'57;...]

ゲルマン行列 ($SU(3)$ 3表現の生成子):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_j (j = 1, 2, 3)$ と λ_8 を $SU(2)$ と $U(1)$ の生成子と見なせる。

$SU(3) \supset SO(3) \simeq SU(2) (S)$ [5, 6, 25–27, E.Dynkin'57;...]

ゲルマン行列 ($SU(3)$ 3表現の生成子):

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda_j (j = 2, 5, 7)$ を $SO(3) \simeq SU(2)$ の生成子と見なせる .

大統一ゲージ群の候補とその部分群 [6, e.g., N.Y.'15]

正則部分群 だけを用いる場合の大統一ゲージ群の候補の例 :

$$E_8 \supset E_7 \supset E_6 \supset SO(10) \supset SU(5) \supset G_{\text{SM}}.$$

特殊部分群 も用いる場合の大統一ゲージ群の候補の例 :

$$\begin{array}{cccc}
 SO(248) & USp(56) & SU(27) & SU(16) \\
 \cup & \cup & \cup & \cup \\
 E_8 \supset & E_7 \supset & E_6 \supset & SO(10) \supset SU(5) \supset G_{\text{SM}}.
 \end{array}$$

(注) 有限次元リー群に限定し, 正則部分群の可換群 $U(1)$ は省略 .

特殊部分群への破れを用いた大統一理論 [28–31, N.Y.'17-]

- $SU(16)$ 特殊大統一理論 [28, N.Y.'17]
 $SU(16)$ の最大特殊部分群 $SO(10)$ を用いた大統一理論 . $SU(16)$ 定義表現 16 に SM フェルミオンを統一する .
- $SO(32)$ 特殊大統一理論 [29, N.Y.'17]
 $SO(32)$ のヘテロ型超弦理論と関係づけられるかもしれないので $SO(32) \supset SU(16) \times U(1) \supset SO(10) \times U(1)$ を用いた大統一理論 . $SO(32)$ ベクトル表現 32 に SM フェルミオンを統一する .
- $SU(19)$ 特殊大統一理論 [30, N.Y.'18]
 $SU(19) \supset SU(16) \times SU(3)_F \times U(1)$ により三世代の SM フェルミオンをある $SU(19)$ の既約表現に統一する .

特殊大統一理論の講演時に受けた質問 [28-30, N.Y., 17-18]

- 特殊部分群など聞いたこともないものをなぜ考えるのか?
- 特殊部分群への破れなど見聞きしたことがないが実現可能か?
- $SU(16)$ を $SO(10)$ に破るスカラー場のゲージ群の表現が大き過ぎるため繰り込み群で発散するから意味がなくなるのか?
- $SU(16)$ 120表現(二階反対称テンソル表現)のフェルミオンは量子異常の相殺以外に何か意味はあるのか? (by 九後さん)
- フェルミオン対凝縮で $SU(16)$ の $SO(10)$ への破れを起こす複合ヒッグス場を作れないか? (by 九後さん)

本講演の目次

1. 導入 (11ページ)
2. 対称性の破れの一般論 (4ページ)
3. 南部–Jona-Lasinio(NJL) 模型
 - 3-1. E_6 対称性 (3ページ) [32, T.Kugo, J.Sato'94]
 - 3-2. $SU(N)$ 対称性 (7ページ) [1, T.Kugo, N.Y.'19]
 - 3-3. $SO(N)$ 対称性 (2ページ) [2, T.Kugo, N.Y.'20]
4. まとめ (2ページ)

対称性とその破れ [5, 33, e.g., L.Michel'80; R.Slansky'81]

場の理論での対称性の破れで最低限必要な知識は何か?

- リー群とその部分群 (subgroup) は何か?
- リー群の各表現の小群 (little group) は何か?
- リー群の変換の下で不変な作用は何か?

⇒ 有効ポテンシャルの最小で保たれる対称性は何か?

具体例： $SU(3)$ の場合 [5, 6, e.g., R.Slansky'81; N.Y.'15]

- $SU(3)$ の最大部分群は何か?

$SU(2) \times U(1)(R)$ と $SO(3) \simeq SU(2)(S)$ の二つである。

- $SU(3)$ のある表現の最大小群は何か?

$SU(3)$ 3 の場合, $SU(2)(R)$ である。

$SU(3)$ 6 の場合, $SU(2)(R)$ と $SO(3) \simeq SU(2)(S)$ である。

$SU(3)$ 8 の場合, $SU(2) \times U(1)(R)$ である。

上記から定義・随伴表現では正則部分群への破れが起こりそうだが、二階対称テンソル表現では特殊部分群への破れも起こりえそう。

$SU(n)$ ゲージ理論の解析結果 [34, L.-F.Li'74]

$SU(n)$ ゲージ理論でのヒッグス機構による対称性の破れのまとめ

スカラー場の表現	最小エネルギー状態での対称性
定義表現	$SU(n) \rightarrow SU(n-1)(R)$
二階対称テンソル	$SU(n) \rightarrow SU(n-1)(R)$ or $SO(n)(S)$
二階反対称テンソル	$SU(n) \rightarrow SU(n-2)(R)$ or $USp(2[n/2])(S)$
随伴表現	$SU(n) \rightarrow SU(m) \times SU(n-m) \times U(1)(R)$

$SU(n)$ 対称性は **正則部分群** にのみ破れうると漠然と考えられているようであるが, $SU(n)$ は **特殊部分群** に破れうる.

リー群の(特殊)部分群への破れの機構

- スカラー凝縮(ヒッグス機構)を用いた $SU(n)$ の $SO(n)$ 特殊部分群などへの破れ [34, 35, L.-F.Li'74; S.Meljanac, M.Milosevic, S.Pallua'82; ...]
- フェルミオン対凝縮(力学的対称性の破れ)を用いた $SU(n)$ の $SO(n)$ 特殊部分群への破れや E_6 の F_4 や G_2 への破れ [3, 4, 32, 36, 37, Y.Nambu, G.Jona-Lasino'61; L.Susskind'78; M.E.Peskin'80; T.Kugo, J.Sato'94; ...] .
- オービフォールド境界条件を用いた特殊部分群への破れ(例, $SU(n)$ の $SO(n)$ 特殊部分群, E_6 の F_4 特殊部分群への破れなど) [38, A.Hebecker, J.March-Rusell'02; ...] .

今回の研究に関連の深い [32, T.Kugo, J.Sato'94] の議論を確認する .

本講演の目次

1. 導入 (11ページ)
2. 対称性の破れの一般論 (4ページ)
3. 南部–Jona-Lasinio(NJL) 模型
 - 3-1. E_6 対称性 (3ページ) [32, T.Kugo, J.Sato'94]
 - 3-2. $SU(N)$ 対称性 (7ページ) [1, T.Kugo, N.Y.'19]
 - 3-3. $SO(N)$ 対称性 (2ページ) [2, T.Kugo, N.Y.'20]
4. まとめ (2ページ)

E_6 対称性の破れ [32, T.Kugo, J.Sato'94]

- E_6 27フェルミオン $\psi = (\psi_I) (I = 1, 2, \dots, 27)$ のみ含まれる NJL タイプの有効模型を考える :

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^I i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_I + \sum_{p=1}^2 G_{\mathbf{R}_p} (\psi_I \psi_J)_{\mathbf{R}_p} (\bar{\psi}^I \bar{\psi}^J)_{\bar{\mathbf{R}}_p}.$$

$$E_6 \text{ のテンソル積 } (27 \otimes 27)_S = (\overline{351'}) \oplus (\overline{27}) =: \mathbf{R}_1 \oplus \mathbf{R}_2.$$

- 通常の四次元 NJL 模型と同様に補助場の方法 [39, 40, D.J.Gross, A.Neveu'78; T.Kugo'78] を用いるために複素スカラーの補助場として $\Phi_{\overline{351'}}$ と $\Phi_{\overline{27}}$ の二つを導入し, 1-ループの有効ポテンシャルの範囲で解析する (詳細は省略) .

E_6 の最大部分群と最大小群 [5, 6, R.Slansky'81;N.Y.'15]

- E_6 の最大部分群は何か?

$$SO(10) \times U(1), SU(6) \times SU(2), SU(3) \times SU(3) \times SU(3)(R);$$

$$F_4, SU(3) \times G_2, USp(8), G_2, SU(3)(S).$$

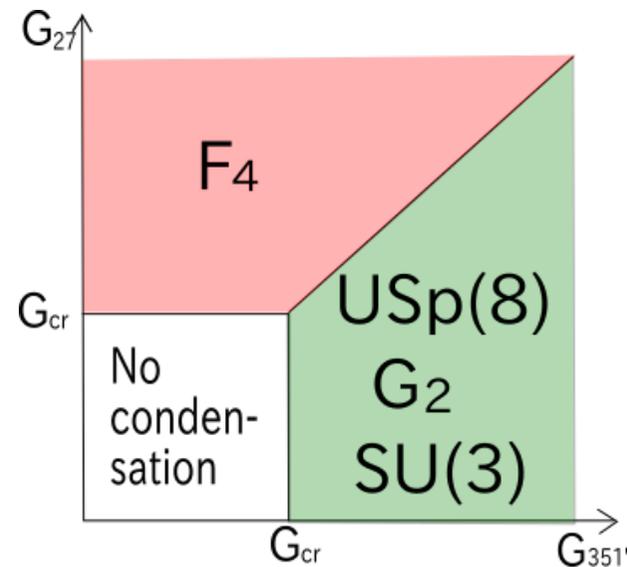
- E_6 の 27 と 351' 表現の最大小群は何か?

$$27 \text{ の場合 , } SO(10)(R); F_4(S)$$

$$351' \text{ の場合 , } SO(10)(R); F_4, USp(8), G_2, SU(3), SU(4) \times SU(2)(S).$$

上記の場合 , $SO(10)$ を除くと最大小群は全て特殊部分群である .

E_6 の NJL 有効模型での解析結果 [32, T.Kugo, J.Sato'94]



(注) G_{27} と $G_{351'}$ は NJL タイプの相互作用の結合定数とする。

NJL 有効模型の近似解析の限りでは E_6 は **特殊部分群** へしか破れないという結果となっている。

本講演の目次

1. 導入 (11ページ)
2. 対称性の破れの一般論 (4ページ)
3. 南部–Jona-Lasinio(NJL) 模型
 - 3-1. E_6 対称性 (3ページ) [32, T.Kugo, J.Sato'94]
 - 3-2. $SU(N)$ 対称性 (7ページ) [1, T.Kugo, N.Y.'19]
 - 3-3. $SO(N)$ 対称性 (2ページ) [2, T.Kugo, N.Y.'20]
4. まとめ (2ページ)

$SU(n)$ 対称性の破れ [1, 37, e.g., T.Kugo, N.Y.'19]

- $SU(n)$ 定義表現 \square フェルミオン $\psi = (\psi_I) (I = 1, 2, \dots, n)$ のみ含まれる NJL タイプ有効模型を考える .

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^I i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_I + \sum_{p=1}^1 G_{\mathbf{R}_p} (\psi_I \psi_J)_{\mathbf{R}_p} (\bar{\psi}^I \bar{\psi}^J)_{\bar{\mathbf{R}}_p}.$$

$$SU(n) \text{ のテンソル積 } (\square \otimes \square)_S = \square\square =: \mathbf{R}_1.$$

- E_6 の場合と同様に補助場の方法を用いるために, 複素スカラーの補助場として $\Phi_{\square\square}$ を導入し, 有効ポテンシャルを解析する .

$SU(n)$ の最大部分群と最大小群 [6, N.Y.'15]

- $SU(n)$ の最大部分群は何か?

$$SU(m) \times SU(n - m) \times U(1) (m < n) (\mathbb{R});$$

$$\text{偶数の } n : SO(n), USp(n) (\mathbb{S}); \text{ 奇数の } n : SO(n) (\mathbb{S});$$

その他にも特定の n に対して, $SU(2), SU(3), \dots (\mathbb{S})$ がある .

- $SU(n)$ の $\square\square$ 表現の最大小群は何か?

$$\square\square \text{ の場合, } SU(n - 1) (\mathbb{R}); SO(n) (\mathbb{S}).$$

$SU(n)$ の NJL 有効模型での解析結果 [1, e.g., T.Kugo, N.Y.'19]

$SU(n)$ □ のフェルミオンによる力学的対称性の破れのまとめ

表現	最小エネルギー状態での対称性
□□	$SU(n) \rightarrow SO(n)(S)$

NJL 有効模型の近似解析の限りでは $SU(n)$ は特殊部分群 $SO(n)$ へしか破れないという結果となった。

次に特殊大統一理論 [28–31, N.Yamatsu,17-20] で必要とされている $SU(16) \rightarrow SO(10)$ の破れを起こしうる二階反対称テンソルの場合を見る。

$SU(n)$ NJL 有効模型での対称性の破れ [1, T.Kugo,N.Y.'19]

- $SU(n)$ \square (二階反対称テンソル) フェルミオン $\psi = (\psi_I) (I = 1, 2, \dots, n(n-1)/2)$ のみ含まれる NJL タイプ有効模型を考える .

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^I i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_I + \sum_{p=1}^2 G_{R_p} (\psi_I \psi_J)_{R_p} (\bar{\psi}^I \bar{\psi}^J)_{\bar{R}_p}.$$

$$SU(n) \text{ の対称テンソル積 } \left(\square \otimes \square \right)_S = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} =: R_1 \oplus R_2.$$

- 補助場の方法 [39, 40, D.J.Gross,A.Neveu'78;T.Kugo'78] を用いるために, 複素スカラーの補助場として Φ_{\square} と $\Phi_{\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}}$ の二つを導入し, 有効ポテンシャルを解析する .

$SU(n)$ の最大部分群と最大小群 [6, N.Y.'15]

- $SU(n)$ の最大部分群は何か?

$$SU(m) \times SU(n - m) \times U(1) (m < n) (\mathbb{R});$$

偶数の n : $SO(n), USp(n) (\mathbb{S})$; 奇数の n : $SO(n) (\mathbb{S})$;

その他にも特定の n に対して, $SU(2), SU(3), \dots (\mathbb{S})$ がある .

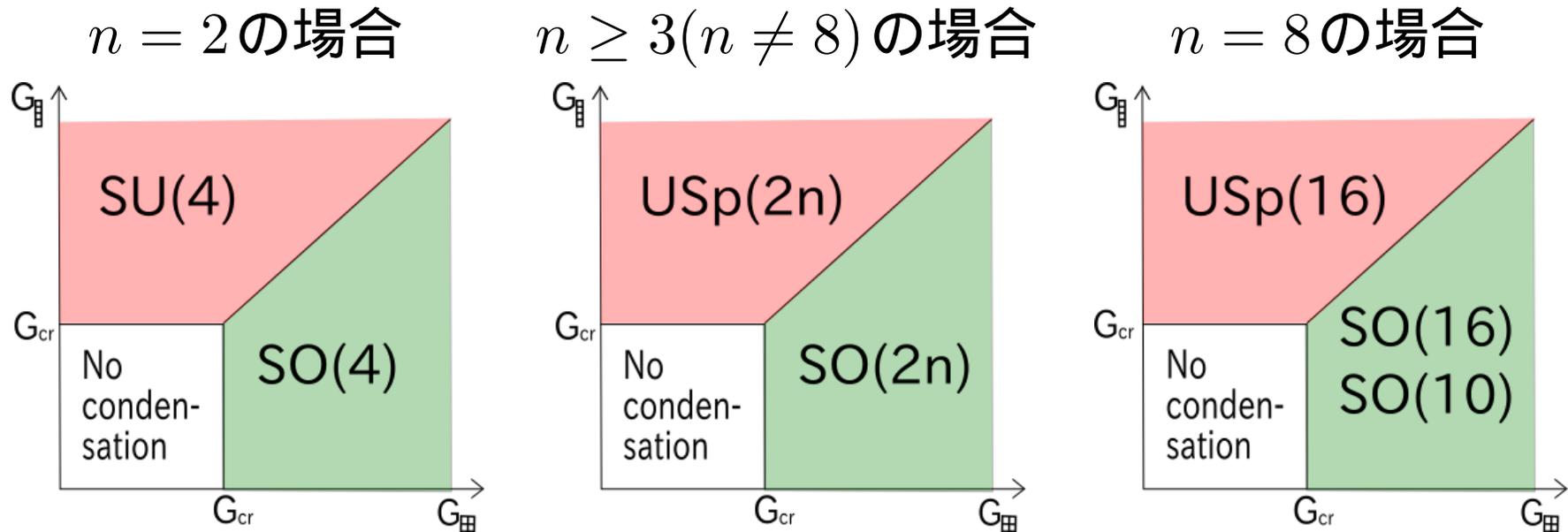
- $SU(n)$ の $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ と $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ 表現の最大小群は何か?

$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ の場合, $SU(2) \times SU(n - 2) (\mathbb{R}); SO(n), USp(2[n/2]), \dots (\mathbb{S})$

$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$ の場合, $SU(4) \times SU(n - 4) (\mathbb{R}); USp(2[n/2]), \dots (\mathbb{S})$.

$SU(N)$ の NJL 有効模型での解析結果 [1, T.Kugo,N.Y.'19]

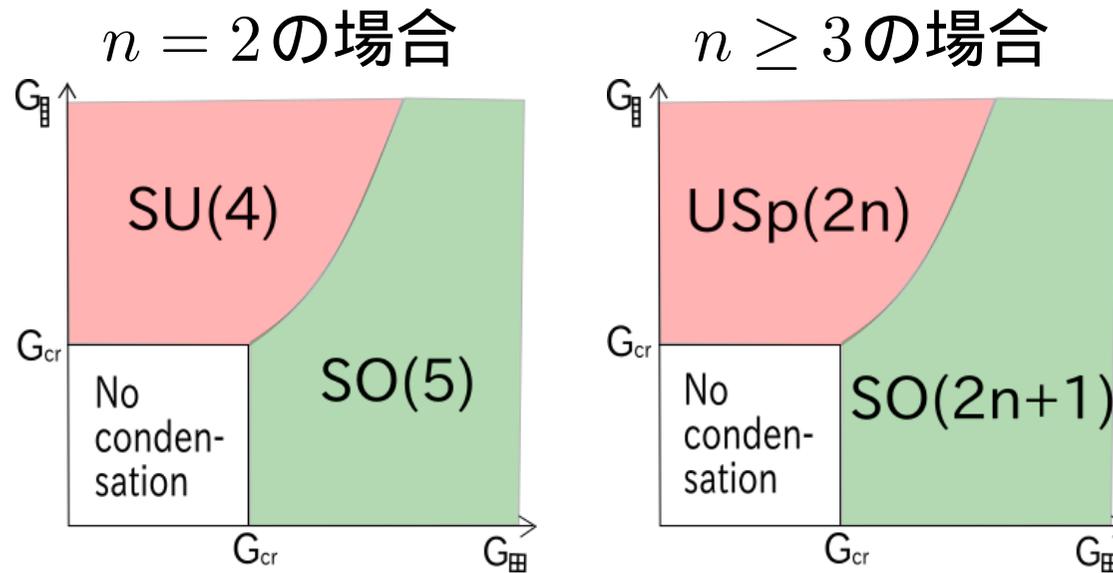
偶数の $N = 2n (n \geq 2)$ の場合の $SU(N)$ の対称性の破れ



(注) $G_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}}$ と $G_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}}$ は各々 $SU(N)$ の $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$ と $\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}$ の NJL タイプの結合定数.

$SU(N)$ の NJL 有効模型での解析結果 [1, T.Kugo,N.Y.'19]

奇数の $N = 2n + 1 (n \geq 2)$ の場合の $SU(N)$ の対称性の破れ



(注) $G_{\text{田}}$ と $G_{\text{田}}$ は各々 $SU(N)$ の $\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$ と $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ の NJL タイプの結合定数 .

本講演の目次

1. 導入 (11ページ)
2. 対称性の破れの一般論 (4ページ)
3. 南部–Jona-Lasinio(NJL) 模型
 - 3-1. E_6 対称性 (3ページ) [32, T.Kugo, J.Sato'94]
 - 3-2. $SU(N)$ 対称性 (7ページ) [1, T.Kugo, N.Y.'19]
 - 3-3. $SO(N)$ 対称性 (2ページ) [2, T.Kugo, N.Y.'20]
4. まとめ (2ページ)

$SO(N = 4n + 2)$ 対称性の破れ [2, T.Kugo,N.Y.'20]

- $SO(N = 4n + 2)$ スピノルフェルミオン $\psi = (\psi_I) (I = 1, 2, \dots, 2^{[(N-1)/2]})$ のみ含まれる NJL タイプ有効模型を考える .

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}^I i \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_I + \sum_{p=1} G_{R_p} (\psi_I \psi_J)_{R_p} (\bar{\psi}^I \bar{\psi}^J)_{\bar{R}_p}.$$

テンソル積の対称部分

$$\left(2^{[\frac{N+1}{2}]} \otimes 2^{[\frac{N+1}{2}]} \right)_S = R_0 \oplus \bigoplus_{p=1}^{[\frac{N}{8}]} R_p.$$

- 適切な補助場 $\Phi_{R_p}^{(I)}$ を導入し, 有効ポテンシャルを解析する .

(ここでは $SO(N)$ のスピノルが複素表現である $N \neq 4n + 2$ の場合のみ示すが他の場合は [2, T.Kugo,N.Y.'20] を参照)

$SO(N = 4n + 2)$ 対称性の破れ

$$SO(N) \rightarrow \begin{cases} SO(2n + 1) \times SO(2n + 1)(S) & \text{for } G_{R_0} : \text{strongest} \\ SO(2n + 5) \times SO(2n - 3)(S) & \text{for } G_{R_1} : \text{strongest} \\ SO(2n + 9) \times SO(2n - 7)(S) & \text{for } G_{R_2} : \text{strongest} \end{cases}$$

$N = 26$ までの例外:

⋮

N	$SO(N)$ 部分群	$SO(N)$ ベクトル表現の対応する表現
14	$G_2(S)$	G_2 の随伴表現 14
26	$F_4(S)$	F_4 の最低次元表現 26

(注) 上記の解析ではすくなくとも一つの G_{R_p} はしきい値を越えておりかつ縮退がないことを仮定している .

本講演の目次

1. 導入 (11ページ)
2. 対称性の破れの一般論 (4ページ)
3. 南部–Jona-Lasinio(NJL) 模型
 - 3-1. E_6 対称性 (3ページ) [32, T.Kugo, J.Sato'94]
 - 3-2. $SU(N)$ 対称性 (7ページ) [1, T.Kugo, N.Y.'19]
 - 3-3. $SO(N)$ 対称性 (2ページ) [2, T.Kugo, N.Y.'20]
4. まとめ (2ページ)

まとめ

リー群の **特殊部分群** への破れは特別なことではないことを、NJLタイプの有効相互作用を用いた解析結果で示した。

今回のNJL有効モデルでの解析結果

- すくなくともNJL有効モデルの近似解析の限りでは $SU(5)$ の反対称テンソル表現のフェルミオン以外は特殊部分群に破れる。
- ⇒ 対称性の特殊部分群への破れは全く特別なことではない。
- ⇒ 標準理論を越えるモデル構築などでは真面目に考慮すべきことと考えられる。

いくつかのコメント

- $SU(n)$ の定義・随伴表現のスカラー場での対称性の破れは正則部分群しか最大小群が存在しない特別な例である。
- ⇒ 他の表現や複合スカラー場の場合にこれらと同様の結果になると考えるのは止めた方が良い。
- 単一のスカラー場だけであればほとんどの場合 (Michel 予想 [33, L.Michel'80] の通りに) 最大小群に破れるが, 複数のスカラー場があると最大でない小群に破れうる。
 - $SO(N \neq 4n + 2)$ のスピノル表現の場合は主に正則部分群への破れ, 例外的に特殊部分群への破れが起こる [2, T.Kugo,N.Y.'20] 。

References

- [1] T. Kugo and N. Yamatsu, “Is Symmetry Breaking into Special Subgroup Special?,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2019** (2019) 073B06, [arXiv:1904.06857 \[hep-ph\]](#).
- [2] T. Kugo and N. Yamatsu, “Dynamical Breaking to Special or Regular Subgroups in the $SO(N)$ Nambu–Jona-Lasinio Model,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2020** (2020) 023B09, [arXiv:1911.09834 \[hep-ph\]](#).
- [3] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I,” *Phys. Rev.* **122** (1961) 345–358.
- [4] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, “Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II,” *Phys. Rev.* **124** (1961) 246–254.
- [5] R. Slansky, “Group Theory for Unified Model Building,” *Phys. Rept.* **79** (1981) 1–128.
- [6] N. Yamatsu, “Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building,” [arXiv:1511.08771 \[hep-ph\]](#).
- [7] H. Georgi and S. L. Glashow, “Unity of All Elementary Particle Forces,” *Phys. Rev. Lett.* **32** (1974) 438–441.

- [8] K. Inoue, A. Kakuto, and Y. Nakano, “Unification of the Lepton-Quark World by the Gauge Group $SU(6)$,” *Prog.Theor.Phys.* **58** (1977) 630.
- [9] H. Fritzsch and P. Minkowski, “Unified Interactions of Leptons and Hadrons,” *Ann. Phys.* **93** (1975) 193–266.
- [10] F. Gursev, P. Ramond, and P. Sikivie, “A Universal Gauge Theory Model Based on E_6 ,” *Phys. Lett.* **B60** (1976) 177.
- [11] K. Kojima, K. Takenaga, and T. Yamashita, “Grand Gauge-Higgs Unification,” *Phys. Rev.* **D84** (2011) 051701, [arXiv:1103.1234 \[hep-ph\]](#).
- [12] K. Kojima, K. Takenaga, and T. Yamashita, “Gauge Symmetry Breaking Patterns in an $SU(5)$ Grand Gauge-Higgs Unification Model,” *Phys. Rev.* **D95** (2017) 015021, [arXiv:1608.05496 \[hep-ph\]](#).
- [13] G. Burdman and Y. Nomura, “Unification of Higgs and Gauge Fields in Five-Dimensions,” *Nucl. Phys.* **B656** (2003) 3–22, [arXiv:hep-ph/0210257 \[hep-ph\]](#).
- [14] C. S. Lim and N. Maru, “Towards a Realistic Grand Gauge-Higgs Unification,” *Phys.Lett.* **B653** (2007) 320–324, [arXiv:0706.1397 \[hep-ph\]](#).
- [15] H. D. Kim and S. Raby, “Unification in 5-D $SO(10)$,” *JHEP* **01** (2003) 056, [arXiv:hep-ph/0212348 \[hep-ph\]](#).

- [16] T. Fukuyama and N. Okada, “A Simple $SO(10)$ GUT in Five Dimensions,” *Phys. Rev.* **D78** (2008) 015005, arXiv:0803.1758 [hep-ph].
- [17] Y. Kawamura and T. Miura, “Classification of Standard Model Particles in E_6 Orbifold Grand Unified Theories,” *Int. J. Mod. Phys.* **A28** (2013) 1350055, arXiv:1301.7469 [hep-ph].
- [18] K. Kojima, K. Takenaga, and T. Yamashita, “The Standard Model Gauge Symmetry from Higher-Rank Unified Groups in Grand Gauge-Higgs Unification Models,” *JHEP* **06** (2017) 018, arXiv:1704.04840 [hep-ph].
- [19] Y. Hosotani and N. Yamatsu, “Gauge-Higgs Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2015** (2015) 111B01, arXiv:1504.03817 [hep-ph].
- [20] Y. Hosotani and N. Yamatsu, “Gauge-Higgs Grand Unification,” *PoS PLANCK2015* (2015) 058, arXiv:1511.01674 [hep-ph].
- [21] N. Yamatsu, “Gauge Coupling Unification in Gauge-Higgs Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016** (2016) 043B02, arXiv:1512.05559 [hep-ph].
- [22] A. Furui, Y. Hosotani, and N. Yamatsu, “Toward Realistic Gauge-Higgs Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2016** (2016) 093B01, arXiv:1606.07222 [hep-ph].

- [23] Y. Hosotani and N. Yamatsu, “Gauge-Higgs Seesaw Mechanism in 6-Dimensional Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** (2017) 091B01, arXiv:1706.03503 [hep-ph].
- [24] Y. Hosotani and N. Yamatsu, “Electroweak Symmetry Breaking and Mass Spectra in Six-Dimensional Gauge-Higgs Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2018** (2018) 023B05, arXiv:1710.04811 [hep-ph].
- [25] E. Dynkin, “Maximal Subgroups of the Classical Groups,” *Amer. Math. Soc. Transl.* **6** (1957) 245.
- [26] E. Dynkin, “Semisimple Subalgebras of Semisimple Lie Algebras,” *Amer. Math. Soc. Transl.* **6** (1957) 111.
- [27] R. Cahn, *Semi-Simple Lie Algebras and Their Representations*. Benjamin-Cummings Publishing Company, 1985.
- [28] N. Yamatsu, “Special Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** (2017) 061B01, arXiv:1704.08827 [hep-ph].
- [29] N. Yamatsu, “String-Inspired Special Grand Unification,” *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2017** (2017) 101B01, arXiv:1708.02078 [hep-ph].

- [30] N. Yamatsu, “Family Unification in Special Grand Unification,” Prog. Theor. Exp. Phys. **2018** (2018) 091B01, arXiv:1807.10855 [hep-ph].
- [31] N. Yamatsu, “ $USp(32)$ Special Grand Unification,” arXiv:2007.08067 [hep-ph].
- [32] T. Kugo and J. Sato, “Dynamical Symmetry Breaking in an E(6) GUT Model,” Prog. Theor. Phys. **91** (1994) 1217–1238, arXiv:hep-ph/9402357 [hep-ph].
- [33] L. Michel, “Symmetry Defects and Broken Symmetry. Configurations Hidden Symmetry,” Rev. Mod. Phys. **52** (1980) 617–651.
- [34] L.-F. Li, “Group Theory of the Spontaneously Broken Gauge Symmetries,” Phys. Rev. **D9** (1974) 1723–1739.
- [35] S. Meljanac, M. Milosevic, and S. Pallua, “Extrema of Higgs Potential and Higher Representations,” Phys. Rev. **D26** (1982) 2936–2939.
- [36] L. Susskind, “Dynamics of Spontaneous Symmetry Breaking in the Weinberg- Salam Theory,” Phys. Rev. **D20** (1979) 2619–2625.
- [37] M. E. Peskin, “The Alignment of the Vacuum in Theories of Technicolor,” Nucl.Phys. **B175** (1980) 197–233.

- [38] A. Hebecker and J. March-Russell, “The Structure of GUT Breaking by Orbifolding,” Nucl. Phys. **B625** (2002) 128–150, arXiv:hep-ph/0107039 [hep-ph].
- [39] D. J. Gross and A. Neveu, “Dynamical Symmetry Breaking in Asymptotically Free Field Theories,” Phys. Rev. **D10** (1974) 3235.
- [40] T. Kugo, “Dynamical Instability of the Vacuum in the Lagrangian Formalism of the Bethe-Salpeter Bound States,” Phys. Lett. **76B** (1978) 625–630.