クリフォード・ディラック代数による標準模型の革新の可能性について

小泉耕蔵（立命館大学、摂南大学、近畿大学、京都府立看護学校　非常勤講師）

曽我見郁夫（京都産業大学理学部、京都大学YITP）

2021年１１月6日－8日

於：大阪市立大学南部陽一郎物理学研究所

概要

- カイラルトリプレットとディラック・クリフォード代数
- ディラック・クリフォード代数の表現
- ラグランジアンとリシャフリング対称性
- EW対称性の破れと質量行列
- 冪単行列について
- 数値解析
- 議論

はじめに

- 標準模型：過去50年のほとんど全ての加速器実験のテストをクリアー

  2012年LHCによるHiggs粒子の発見により更なる確証

  加速器実験の進展

- ニュートリノ物理の大きな進展

- 世代に依存しないゲージ相互作用の単純さ
- 統制なき湯川相互作用項

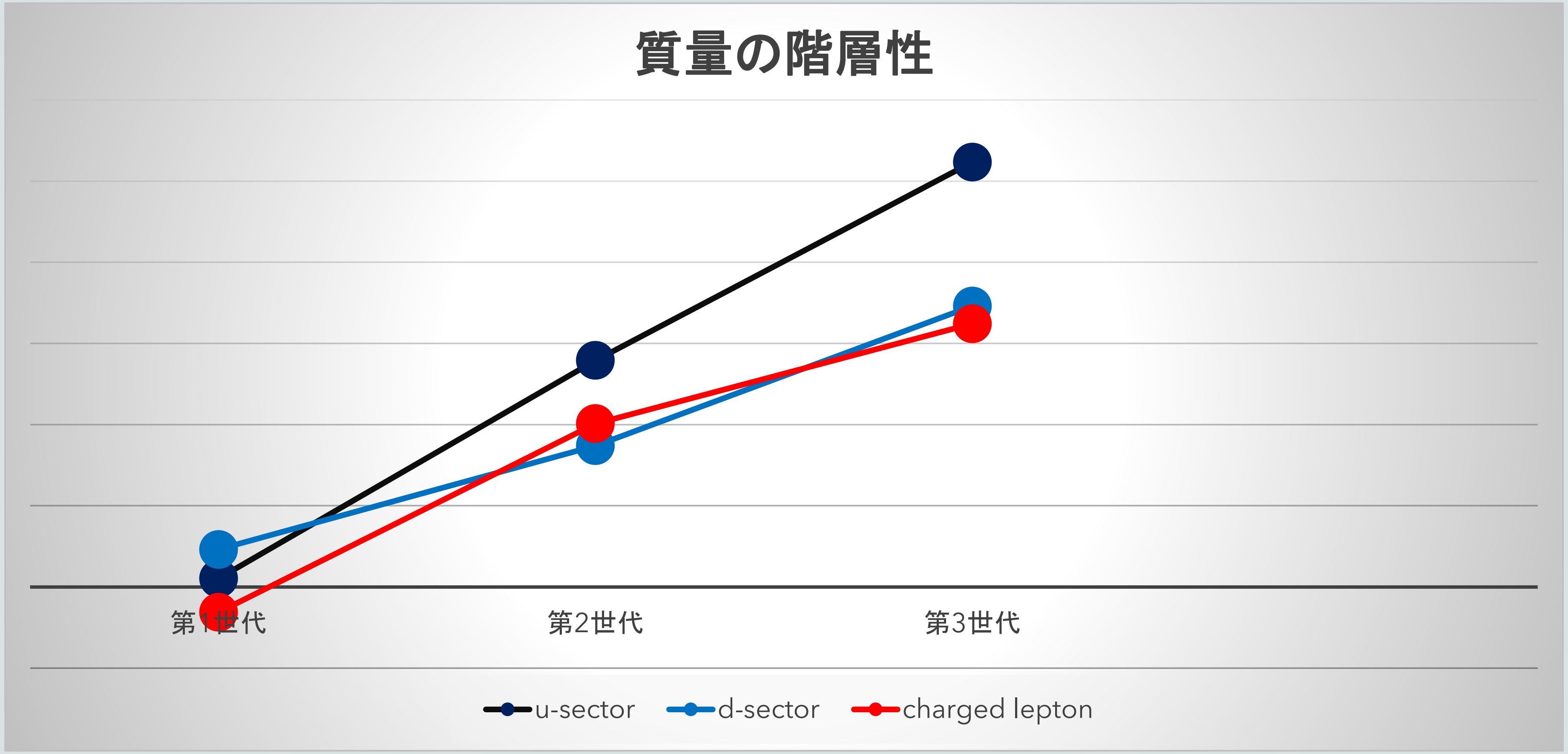
→Higgs場とフェルミオン場の絡みが今後の物理の焦点

質量スペクトル(Mzスケール)

$m_u = 1.27^{+0.50}_{-0.42}$ MeV, $m_c = 0.619 \pm 0.084$ GeV, $m_t = 171.7 \pm 3.0$GeV

$m_d = 2.90^{+1.24}_{-1.19}$ MeV, $m_s = 55^{+16}_{-15}$MeV, $m_b = 2.89 \pm 0.09$GeV

$m_e = 0.48657$ MeV, $m_\mu = 102.718$ MeV, $m_\tau = 1746.24^{+0.20}_{0.19}$MeV



カイラルトリプレットとディラック・クリフォード代数

$$\{\hat{\Gamma}^{\mu}, \hat{\Gamma}^{\nu}\} = \hat{\Gamma}^{\mu}\hat{\Gamma}^{\nu} + \hat{\Gamma}^{\nu}\hat{\Gamma}^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu}\ \hat{I}$$

ガンマ演算子は、フェルミオン場に個々に働く必要があるのか？

外部（ローレンツ）と内部（スピンや世代）の糊付けの役割？

カイラルトリプレットの導入

$$\Psi_{\alpha}(x) = \begin{pmatrix} \psi_{\alpha}^{1}(x) \\ \psi_{\alpha}^{2}(x) \\ \psi_{\alpha}^{3}(x) \end{pmatrix} \quad (\alpha = q, u, d, l, e, \nu)$$

q, l : $EW\ left-handed\ doublet$
u, d, e, ν: $EW\ right-handed\ singlet$

カイラルトリプレットへの作用と表現

$$\hat{\Gamma}^{\mu}\Psi_{\alpha}(x) = \Gamma_{\alpha}^{\mu}\ \Psi_{\alpha}(x)$$

→ディラック・クリフォード代数： $A_{\alpha} = \langle \Gamma_{\alpha}^{\mu} \rangle = \{I_{\alpha}, \Gamma_{\alpha}^{\mu}, \Sigma_{\alpha}^{\mu\nu}, \Gamma_{\alpha}^{5}\Gamma_{\alpha}^{\mu}, \Gamma_{\alpha}^{5}\}$

ディラック・クリフォード代数の表現-(1)

Coleman-Mandulaの定理

"Theorem on the impossibility of combining space-time and internal symmetries in any but a trivial way."

→Lorentz symmetryの生成子$\hat{\Sigma}^{\mu\nu}=\frac{i}{2}(\hat{\Gamma}^{\mu}\hat{\Gamma}^{\nu}-\hat{\Gamma}^{\nu}\hat{\Gamma}^{\mu})$の表現

$$\Sigma_{\alpha}^{\mu\nu}=\frac{i}{2}\left(\Gamma_{\alpha}^{\mu}\Gamma_{\alpha}^{\nu}-\Gamma_{\alpha}^{\nu}\Gamma_{\alpha}^{\mu}\right)=I_{\alpha}^{in}\otimes\frac{i}{2}(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}-\gamma^{\nu}\gamma^{\mu})$$

ユニタリートリック

$$U_{\alpha}^{\dagger}(\Lambda)\Gamma_{\alpha}^{0}=\Gamma_{\alpha}^{0}\mathrm{U}_{\alpha}^{-1}(\Lambda)$$

ディラック・クリフォード代数の表現-(2)

$$\Sigma_\alpha^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left(\Gamma_\alpha^\mu \Gamma_\alpha^\nu - \Gamma_\alpha^\nu \Gamma_\alpha^\mu\right) = I_\alpha^{in} \otimes \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu),$$

$$\{\Gamma_\alpha^\mu, \Gamma_\alpha^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} I_\alpha^{in} \otimes I_4$$

$$\rightarrow \Gamma_\alpha^\mu \Gamma_\alpha^\nu = I_\alpha^{in} \otimes \gamma^\mu\gamma^\nu$$

$$\rightarrow \Gamma_\alpha^5 = i\Gamma_\alpha^0\Gamma_\alpha^1\Gamma_\alpha^2\Gamma_\alpha^3 = I_\alpha^{in} \otimes \gamma^5$$

可能な表現

$$\Gamma_\alpha^\mu = \begin{cases} I_2 \otimes X_\alpha \otimes \gamma^\mu & (\alpha = q, l) \\ X_\alpha \otimes \gamma^\mu & (\alpha = u, d, e, \nu) \end{cases}$$

where $X_\alpha^2 = I_3$

ラグランジアン

運動量項とゲージ相互作用項

$$\mathcal{L}_{kg} = \sum_{\alpha=q,u,d,l,e} \Psi_\alpha^\dagger \widehat{\Gamma^0}\widehat{\Gamma^\mu} i\,\mathcal{D}_\mu \Psi_\alpha = \sum_{\alpha=q,u,d,l,e} \Psi_\alpha^\dagger \Gamma_\alpha^0 \Gamma_\alpha^\mu i\,\mathcal{D}_\mu \Psi_\alpha$$

$\rightarrow\ \Gamma_\alpha^0\Gamma_\alpha^\mu = I_\alpha^{in} \otimes \gamma^0\gamma^\mu$よりいつも通り

ヒッグス相互作用項

$$\mathcal{L}_{\mathrm{HT}} = -c_{Lu}\Psi_q^\dagger \overleftarrow{\widehat{\Gamma^0}}\phi\Psi_u - c_{Ld}\Psi_q^\dagger \overleftarrow{\widehat{\Gamma^0}}\phi\Psi_d - c_{L\nu}\Psi_l^\dagger \overleftarrow{\widehat{\Gamma^0}}\phi\Psi_\nu - c_{Le}\Psi_l^\dagger \overleftarrow{\widehat{\Gamma^0}}\phi\Psi_e$$

$$-c_u\Psi_q^\dagger\phi\overrightarrow{\widehat{\Gamma^0}}\Psi_u - c_d\Psi_q^\dagger\phi\overrightarrow{\widehat{\Gamma^0}}\Psi_d - c_\nu\Psi_q^\dagger\phi\overrightarrow{\widehat{\Gamma^0}}\Psi_\nu - c_e\Psi_q^\dagger\phi\overrightarrow{\widehat{\Gamma^0}}\Psi_e + \mathrm{h.c.}$$

$$= -c_{Lu}\Psi_q^\dagger\Gamma_q^0\phi\Psi_u - c_{Ld}\Psi_q^\dagger\Gamma_q^0\phi\Psi_d - c_{L\nu}\Psi_l^\dagger\Gamma_l^0\phi\Psi_\nu - c_{Le}\Psi_l^\dagger\Gamma_l^0\phi\Psi_e$$

$$-c_u\Psi_q^\dagger\phi\Gamma_u^0\Psi_u - c_d\Psi_q^\dagger\phi\Gamma_d^0\Psi_d - c_\nu\Psi_q^\dagger\phi\Gamma_\nu^0\Psi_\nu - c_e\Psi_q^\dagger\phi\Gamma_e^0\Psi_e + \mathrm{h.c.}$$

ラグランジアンとリシャッフリング対称性

右巻きニュートリノの運動項とマジョラナー相互作用項

$$\mathcal{L}_\nu = \Psi_\nu^\dagger \widehat{\Gamma^0}\widehat{\Gamma^\mu} i\,\mathcal{D}_\mu \Psi_\nu - \frac{1}{2} M\ \Psi_\nu^T i\ \widehat{\Gamma_\nu^2}\widehat{\Gamma_\nu^0}\Psi_\nu + \text{h.c.}$$

$$= \Psi_\nu^\dagger \Gamma_\nu^0 \Gamma_\nu^\mu i\,\mathcal{D}_\mu \Psi_\nu - \frac{1}{2} M\ \Psi_\nu^T i \Gamma_\nu^2 \Gamma_\nu^0 \Psi_\nu + \text{h.c.}$$

リシャッフリング対称性（ある意味での正準変換）

$$U_\alpha = \begin{cases} I_2 \otimes U_q \quad (\alpha = q)\ \ and \quad U_q \quad (\alpha = u, d) \\ I_2 \otimes O_l \quad (\alpha = l) and \quad O_l \quad (\alpha = \nu, e) \end{cases},$$

EW対称性の破れと質量行列

EWの破れ$\langle\phi^0\rangle = v$により$\mathcal{L}_{HT}$から

クォーク・荷電レプトンの質量行列

$$M_\alpha = (c_\alpha X_\alpha + c_{L\alpha} X_{L\alpha})v \qquad (\alpha = u, d, e)$$

ニュートリノセクターの質量項

$$\mathcal{L}_{\nu Mass} = -\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L, \overline{\nu^c}_R)\begin{pmatrix} 0 & (c_\nu X_\nu + c_{L\nu} X_{L\nu})v \\ (c_\nu X_\nu + c_{L\nu} X_{L\nu})^T v & M I_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix}$$

→左巻きのアクティブニュートリノの質量行列

$$M_{\nu_l} = (c_\nu X_\nu + c_{L\nu} X_{L\nu})v\frac{1}{M}(c_\nu X_\nu + c_{L\nu} X_{L\nu})^T v$$

冪単行列について

冪単行列

$$X^2 = I$$

固有値問題：

$$Xv = \lambda v \to X^2 v = \lambda^2 v$$

→ 固有値： $\lambda = \pm 1$

下三角行列へ分解

$$U^\dagger X U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ * & \lambda_2 & 0 \\ * & * & \lambda_3 \end{pmatrix} \to \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \to \text{自明な対角行列} \\ \text{それ以外} \to \text{非自明な下三角行列} \end{cases}$$

下三角行列と質量スペクトルの近似関係

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_\alpha & y_\alpha & -1 \end{pmatrix} \to X_\alpha^2 = I_3$$

$c_\alpha \gg c_{L\alpha}$とすると

$M_\alpha = (c_\alpha X_\alpha + c_{L\alpha} X_{L\alpha})v \approx c_\alpha X_\alpha v$

$\det(M_\alpha M_\alpha^\dagger) \approx |c_\alpha|^2 v^2$ とX_αの性質から、

$$m_{\alpha 1} m_{\alpha 3} = (m_{\alpha 2})^2 = |c_\alpha|^2 v^2$$

質量行列

左巻き:対角行列、右巻き:下三角行列

$$X_{L\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad X_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_\alpha & y_\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_\alpha = (c_\alpha X_\alpha + c_{L\alpha} X_{L\alpha})v$$

$$= c_\alpha v \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + c_{L\alpha} v \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_\alpha & y_\alpha & -1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\nu_l} = (c_\nu X_\nu + c_{L\nu} X_{L\nu})v \frac{1}{M} (c_\nu X_\nu + c_{L\nu} X_{L\nu})^T v$$

数値解析-(1)

クォークセクター

$$c_u = 2.20649 \times 10^{-3}, \quad c_{Lu} = 3.19554 \times 10^{-5}$$
$$x_u = -319.962, \quad y_u = 27.3056\,\exp(1.39512i)\,,$$
$$c_d = 2.46085 \times 10^{-4}, \quad c_{Ld} = -3.19175 \times 10^{-4}$$
$$x_d = 23.4213, \quad y_d = 41.9395$$

結果

$$m_u = 1.69\ \mathrm{MeV}, \quad m_c = 0.535\ \mathrm{GeV}, \quad m_t = 174.3\ \mathrm{GeV},$$
$$m_d = 1.71\ \mathrm{MeV}, \quad m_s = 70.0\ \mathrm{MeV}, \quad m_b = 2.91\ \mathrm{GeV},$$

$$|V_{CKM}| = \begin{pmatrix} 0.974499 & 0.224362 & 0.003619 \\ 0.224203 & 0.973661 & 0.041438 \\ 0.009169 & 0.040572 & 0.999135 \end{pmatrix}, \quad J = 3.19 \times 10^{-5}$$

数値解析-(2)

レプトンセクター

$$\sqrt{v/M}c_\nu = 2.28\times10^{-7},\qquad \sqrt{v/M}c_{L\nu} = 1.15\times10^{-7}$$

$$x_u = 2.85\,\exp(-1.39i)\,,\qquad y_\nu = 1.51,$$

$$c_e = 3.3163\times10^{-4},\qquad c_{Le} = 2.2940\times10^{-4}$$

$$x_e = 20.954,\qquad y_e = 22.704$$

結果

$$m_{\nu_e} = 6.45\times10^{-4}\ \text{eV},\ m_{\nu_\mu} = 8.62\times10^{-3}\ \text{eV},\ m_{\nu_\tau} = 5.14\times10^{-2}\ \text{eV},$$

$$m_e = 0.48657\ \text{MeV},\qquad m_\mu = 102.72\ \text{MeV},\qquad m_\tau = 1746.3\ \text{MeV},$$

$$|V_{PMNS}| = \begin{pmatrix} 0.828 & 0.540 & 0.154 \\ 0.384 & 0.534 & 0.753 \\ 0.409 & 0.650 & 0.640 \end{pmatrix},\ J = -3.34\times10^{-2}$$

議論

- カイラルトリプレットの導入

→ディラック形式の自然な拡張→ディラック・クリフォード代数

$$\rightarrow \begin{cases} \text{標準模型の強みは保持} \\ \text{湯川相互作用項の単純化} \\ \text{質量の階層構造の説明} \\ \text{質量・混合行列の実験値} \end{cases}$$

(leptonic CP violating Dirac phase: $\delta/\pi = 1.56$

対角化されたMajorana質量項 $\rightarrow M\sim\ 10^8$GeV)

- ディラック・クリフォード代数：内部属性との関りは？
- 隠された数学的構造は？