



レプトン数の時間発展とマヨラナ位相依存性, ユニタリー三角形

両角 卓也
(広島大学)

(素粒子現象論研究会2021/ 07/Nov.)

河野早紀 河村優太 清水勇介 ニコラスベンワ 山本 恵 (on going work)

+ Review on the previous works

- A.S. Adam, N. Benoit, Y. Kawamura, Y. Matsuo, T.M., Y. Shimizu, Y. Tokunaga, N. Toyota,
- PTEP 053B01 (2021) arxiv.2101.07751 (Majorana Case) , BSM2021, arxiv.2105.04306
- A. S. Adam, N. Benoit, Y. Kawamura, Y. Matsuo, T.M., Y. Shimizu, N. Toyota,
- arxiv.2106.02783 (Dirac and Majorana Case)

概要

- 軽いマヨラナニュートリノの担うレプトン数の時間発展の表式の、レプトン混合行列要素に対する依存性を調べた。
- 特に非相対論的な場合には相対論的なニュートリノ振動に特徴的なリフェージング不変量の他にマヨラナニュートリノに特徴的なリフェージング不変量が現れる。
- この依存性をとらえてマヨラナニュートリノのユニタリー三角形やマヨラナ位相を決める方法を考察する。

目次

- 1 レプトン混合行列 (PMNS行列) を用いたリフェイジング不変量
(a) ディラックニュートリノ (b) マヨラナニュートリノ
- 2 マヨラナニュートリノとユニタリー 三角形, マヨラナ位相
- 3 レプトン数の時間発展とマヨラナ位相

ポンテコルボ 牧 中川 坂田 行列 (PMNS/ レプトン混合行列)

ニュートリノの質量基底 $i = 1, 2, 3$, 荷電レプトンの質量基底 $\alpha = e, \mu, \tau$

マヨラナニュートリノの場合 $V_{i\alpha}^T m_{\nu\alpha\beta} V_{\beta j} = m_i \delta_{ij}$ $\nu_{L\alpha} = V_{\alpha i} \nu_{Li}$

$$\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_{L\alpha} \gamma_\mu V_{\alpha i} \nu_{Li} W^- - \frac{1}{2} \overline{(\nu_{Li})^c} m_i \nu_{Li} - \bar{l}_{R\alpha} m_{l\alpha} l_{L\alpha} + h.c.$$

$$l_\alpha \rightarrow e^{i\theta_\alpha} l_\alpha$$

(荷電レプトンのリフェイジングが許される)

$$V_{\alpha i} \rightarrow e^{-i(\theta_\alpha)} V_{\alpha i}:$$

マヨラナの場合のパラメトリゼーション

3つの角度と+3つの CPの破れの位相(=6-3)

$$V_{\sigma i} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha_{21}}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\alpha_{31}}{2}} \end{pmatrix}$$

リフュージングと **PMNS** 行列における角度と **CP** の破れの位相

- ディラックニュートリノの場合: $U_{i\alpha}^\dagger \mathbf{m}_{D\alpha\beta} V_{\beta j} = m_i \delta_{ij}$
- $\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{l}_{L\alpha} \gamma_\mu V_{\alpha i} \nu_{Li} W^- - \frac{1}{2} \bar{\nu}_{Ri} m_i \nu_{Li} - \bar{l}_{R\alpha} m_{l\alpha} l_{L\alpha} + h.c.$
 $l_\alpha \rightarrow e^{i\theta_\alpha} l_\alpha, \nu_i \rightarrow e^{i\theta_i} \nu_i$
 (荷電レプトン, ニュートリノ両方のリフュージングが許される)
 $V_{\alpha i} \rightarrow e^{i(\theta_i - \theta_\alpha)} V_{\alpha i} :$

ディラックニュートリノの場合のパラメトリゼーション

3つの角度と1つの CPの破れの位相 (=6-5)

$$V_{\sigma i} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}$$

レプトン混合行列要素からつくるリフェイジング不変量

- 特定のパラメトリゼーションであらわした混合行列要素自身は質量のきまったディラック場の **位相の再定義 = リフェイジング** に依存する。

物理量はリフェイジング不変量を用いて書ける。

C. Jarlskog, Phys. Rev. Lett. 55(1985) O.W. Greenberg, Phys. Rev. D 32(1985)

$$4\text{つの要素の積} \quad \arg(V_{e1} V_{e2}^* V_{\mu1}^* V_{\mu2}) = \beta_1 - \beta_2$$

- ディラックニュートリノは位相変換できるのに対してマヨラナニュートリノは位相変換できないため マヨラナニュートリノの場合は次のような2つの要素の積の位相もリフェイジング不変量になる。

J. Nieves and P. B. Pal, Phys. Rev. D 36(1987)

Branco and Rebelo(arxiv.0809.2799) defined 6 “Majorana-type” phases.

$$\arg(V_{e1} V_{e2}^*) = \beta_1, \arg(V_{\mu1} V_{\mu2}^*) = \beta_2, \arg(V_{\tau1} V_{\tau2}^*) = \beta_3$$

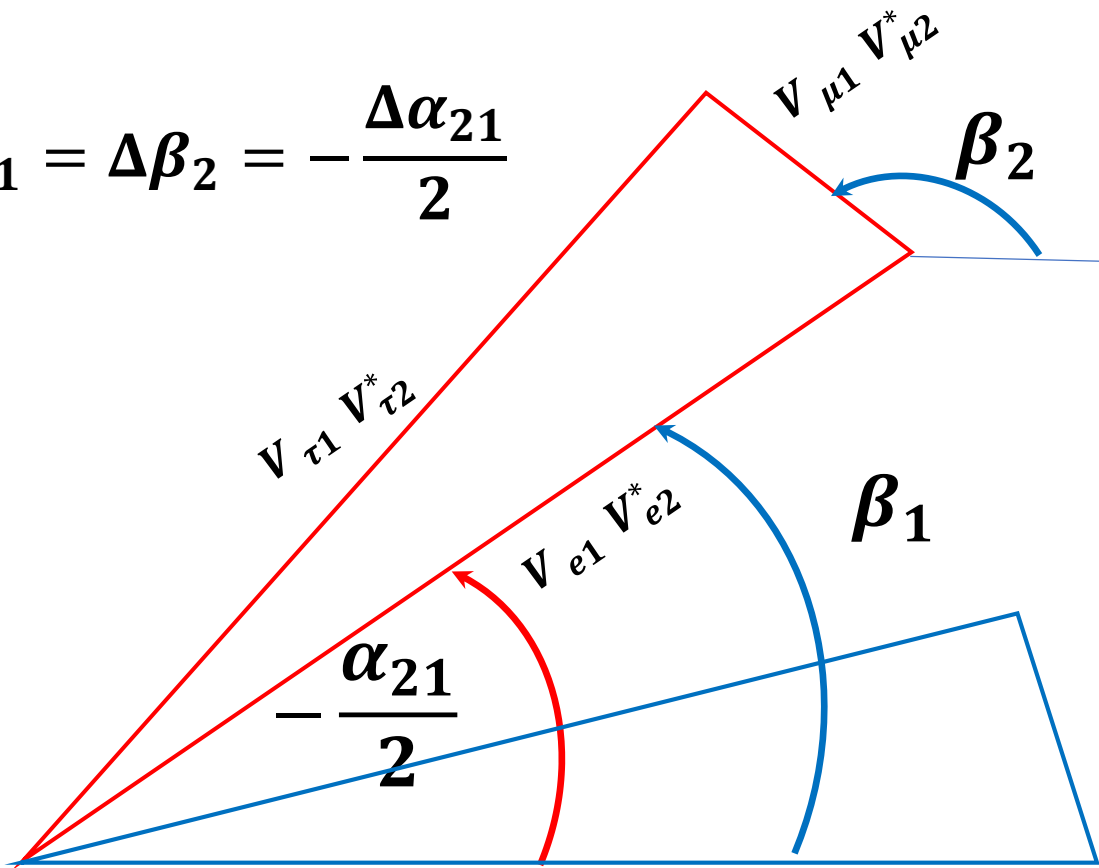
$$\arg(V_{e1} V_{e3}^*) = \gamma_1, \arg(V_{\mu1} V_{\mu3}^*) = \gamma_2, \arg(V_{\tau1} V_{\tau3}^*) = \gamma_3$$

ユニタリー3角形とリフェイジング不変量

$$V_{e1} V_{e2}^* + V_{\mu1} V_{\mu2}^* + V_{\tau1} V_{\tau2}^* = 0$$

ユニタリー3角形

$$\Delta\beta_1 = \Delta\beta_2 = -\frac{\Delta\alpha_{21}}{2}$$



- マヨラナ位相に依らないリフェイジング不変量の組

$$\begin{aligned} & \arg(V_{e1} V_{e2}^* V_{\mu1} V_{\mu2}^*) \\ &= \arg(V_{e1} V_{e2}^*) - \arg(V_{\mu1} V_{\mu2}^*) \\ &= \beta_1 - \beta_2 \end{aligned}$$

- マヨラナ位相に依るリフェイジング不変量の組

$$\begin{aligned} & \arg(V_{e1} V_{e2}^* V_{\mu1} V_{\mu2}^*) \\ &= \arg(V_{e1} V_{e2}^*) + \arg(V_{\mu1} V_{\mu2}^*) \\ &= \beta_1 + \beta_2 \end{aligned}$$

レプトン数の時間発展

A.S. Adam, N. Benoit, Y. Kawamura, Y. Matsuo, T.M., Y. Shimizu, Y. Tokunaga, N. Toyota, PTEP 053B01 (2021) arxiv.2101.07751 (Majorana Case)

A. S. Adam, N. Benoit, Y. Kawamura, Y. Matsuo, T.M., Y. Shimizu, N. Toyota, arxiv.2106.02783 (Dirac and Majorana Case)

- マヨラナ/ディラック質量項を時刻 $t=0$ に加えた後のニュートリノのレプトンファミリー数 $L_\alpha(t)$, ($\alpha = e, \mu, \tau$) の時間発展を求めた。 $L_\alpha(t=0) = \int [a_\alpha^\dagger a_\alpha - b_\alpha^\dagger b_\alpha] \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}$
- 状態 $|\sigma, q\rangle = N a_\sigma^\dagger(q) |0\rangle$ での期待値を求めた。 $\langle \sigma, q | L_\alpha(t) | \sigma, q \rangle$

マヨラナニュートリノの場合のレプトンファミリー数の期待値

$$\langle \sigma, q | L_\alpha(t) | \sigma, q \rangle = \sum_i |V_{\alpha i}|^2 |V_{\sigma i}|^2 \frac{|\mathbf{q}|^2 + m_i^2 \cos(2E_i(\mathbf{q})t)}{E_i^2(\mathbf{q})}$$

A.S. Adam, N. Benoit, Y. Kawamura, Y. Matsuo, T.M., Y. Shimizu, Y. Tokunaga, N. Toyota, PTEP 053B01 (2021) arxiv.2101.07751

$$+ \sum_{\{i,j\}} \text{Re} \left[V_{\alpha i}^* V_{\sigma i} V_{\alpha j} V_{\sigma j}^* \right] \left[\cos((E_i(\mathbf{q}) - E_j(\mathbf{q}))t) \left(1 + \frac{|\mathbf{q}|^2 - m_i m_j \text{Re} \left[\frac{V_{\sigma i}^* V_{\sigma j}}{V_{\sigma i} V_{\sigma j}^*} \right]}{E_i E_j} \right) \right.$$

リフェイジング不変量 (Dirac and Majorana)

Depend on K.M. Dirac type CP phase

$$+ \cos((E_i(\mathbf{q}) + E_j(\mathbf{q}))t) \left(1 - \frac{|\mathbf{q}|^2 - m_i m_j \text{Re} \left[\frac{V_{\sigma i}^* V_{\sigma j}}{V_{\sigma i} V_{\sigma j}^*} \right]}{E_i E_j} \right) \Big]$$

$$- \text{Im} \left[V_{\alpha 1}^* V_{\sigma 1} V_{\alpha 2} V_{\sigma 2}^* \right] \sum_{\{i,j\}} \left[\left(\frac{|\mathbf{q}|}{E_i(\mathbf{q})} - \frac{|\mathbf{q}|}{E_j(\mathbf{q})} \right) \sin((E_i(\mathbf{q}) + E_j(\mathbf{q}))t) \right.$$

$$+ \left(\frac{|\mathbf{q}|}{E_i(\mathbf{q})} + \frac{|\mathbf{q}|}{E_j(\mathbf{q})} \right) \sin((E_i(\mathbf{q}) - E_j(\mathbf{q}))t)$$

リフェイジング不変量 (Majorana)

$$- \frac{m_i m_j}{E_i(\mathbf{q}) E_j(\mathbf{q})} \text{Im} \left[\frac{V_{\sigma i}^* V_{\sigma j}}{V_{\sigma i} V_{\sigma j}^*} \right] \left(\cos((E_i(\mathbf{q}) - E_j(\mathbf{q}))t) - \cos((E_i(\mathbf{q}) + E_j(\mathbf{q}))t) \right) \Big],$$

ディラックとマヨラナの場合の比較

Dirac left-handed

$$|\sigma_L(\mathbf{q})\rangle = \frac{a_{L\sigma}^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle}{\sqrt{\langle 0|a_{L\sigma}(\mathbf{q})a_{L\sigma}^\dagger(\mathbf{q})|0\rangle}},$$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_L(\mathbf{q}) | L_\alpha^L(t) | \sigma_L(\mathbf{q}) \rangle &= \sum_{i,j}^3 \left\{ \text{Re}(V_{\alpha i}^* V_{\sigma i} V_{\alpha j} V_{\sigma j}^*) \left(\cos(E_i(\mathbf{q})t) \cos(E_j(\mathbf{q})t) + \frac{\mathbf{q}^2}{E_i(\mathbf{q})E_j(\mathbf{q})} \sin(E_i(\mathbf{q})t) \sin(E_j(\mathbf{q})t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \text{Im}(V_{\alpha i}^* V_{\sigma i} V_{\alpha j} V_{\sigma j}^*) \left(\frac{|\mathbf{q}|}{E_i(\mathbf{q})} \sin(E_i(\mathbf{q})t) \cos(E_j(\mathbf{q})t) - \frac{|\mathbf{q}|}{E_j(\mathbf{q})} \cos(E_i(\mathbf{q})t) \sin(E_j(\mathbf{q})t) \right) \right\} \end{aligned}$$

**Majorana-Dirac
Left-handed
difference**

$$\begin{aligned} \langle \sigma(\mathbf{p}) | L_\alpha^M(t) | \sigma(\mathbf{p}) \rangle &= \sum_{i,j}^3 \left\{ \text{Re}(V_{\alpha i}^* V_{\sigma i} V_{\alpha j} V_{\sigma j}^*) \left(\cos(E_i(\mathbf{q})t) \cos(E_j(\mathbf{q})t) + \frac{\mathbf{q}^2}{E_i(\mathbf{q})E_j(\mathbf{q})} \sin(E_i(\mathbf{q})t) \sin(E_j(\mathbf{q})t) \right) \right. \\ &\quad \left. - \text{Im}(V_{\alpha i}^* V_{\sigma i} V_{\alpha j} V_{\sigma j}^*) \left(\frac{|\mathbf{q}|}{E_i(\mathbf{q})} \sin(E_i(\mathbf{q})t) \cos(E_j(\mathbf{q})t) - \frac{|\mathbf{q}|}{E_j(\mathbf{q})} \cos(E_i(\mathbf{q})t) \sin(E_j(\mathbf{q})t) \right) \right\} \end{aligned}$$

$$- \sum_{i,j}^3 \left\{ \text{Re}(V_{\alpha i}^* V_{\sigma i}^* V_{\alpha j} V_{\sigma j}) \frac{m_i}{E_i(\mathbf{q})} \frac{m_j}{E_j(\mathbf{q})} \sin(E_i(\mathbf{q})t) \sin(E_j(\mathbf{q})t) \right\},$$

混合行列要素に対する依存性

- ディラックの場合 $V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\sigma i} V_{\sigma j}^*$ for $\sigma \neq \alpha, i \neq j$
マヨラナ位相に依存しない組み合わせ
$$\arg(V_{e1}^* V_{e2} V_{\mu1} V_{\mu2}^*) = \beta_2 - \beta_1$$
- マヨラナの場合 $V_{\alpha i}^* V_{\alpha j} V_{\sigma i}^* V_{\sigma j}$ マヨラナ位相に依存する
$$\arg(V_{e1}^* V_{e2} V_{\mu2}^* V_{\mu1}) = -(\beta_2 + \beta_1)$$

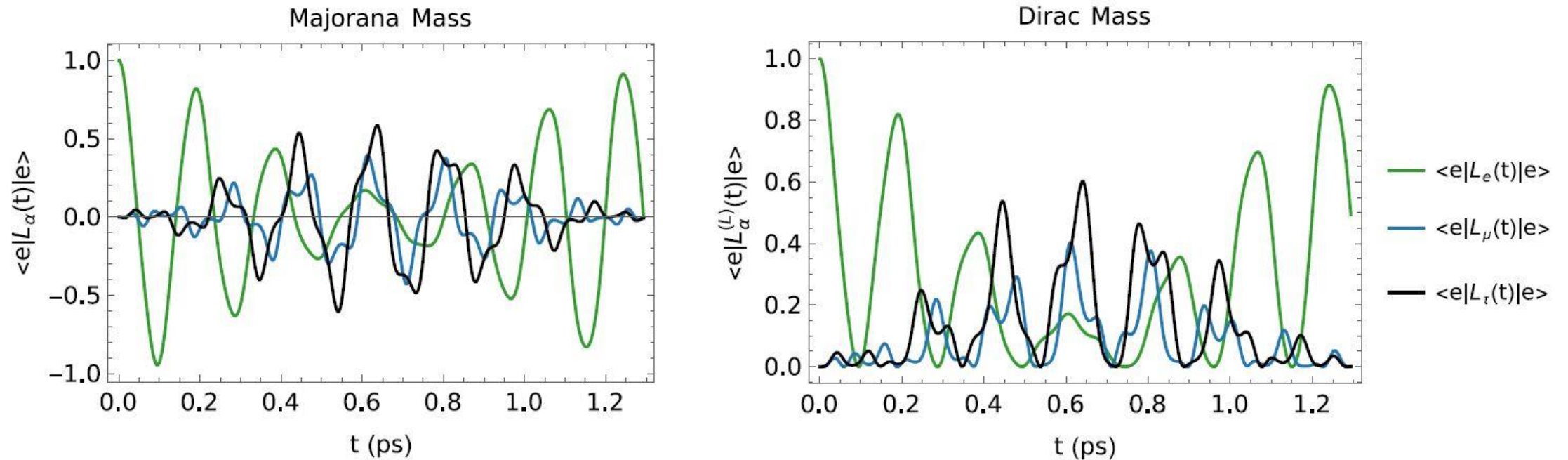
Numerical comparison:

Majorana vs Dirac left-handed lepton family number

$q=0.0002$ (eV)

The lightest neutrino mass=0.01(eV)

normal hierarchy case, Majorana phases are set to be zero



A. S. Adam, N. Benoit, Y. Kawamura, Y. Matsuo, T.M., Y. Shimizu, N. Toyota, arxiv.2106.02783 (Dirac and Majorana Case)

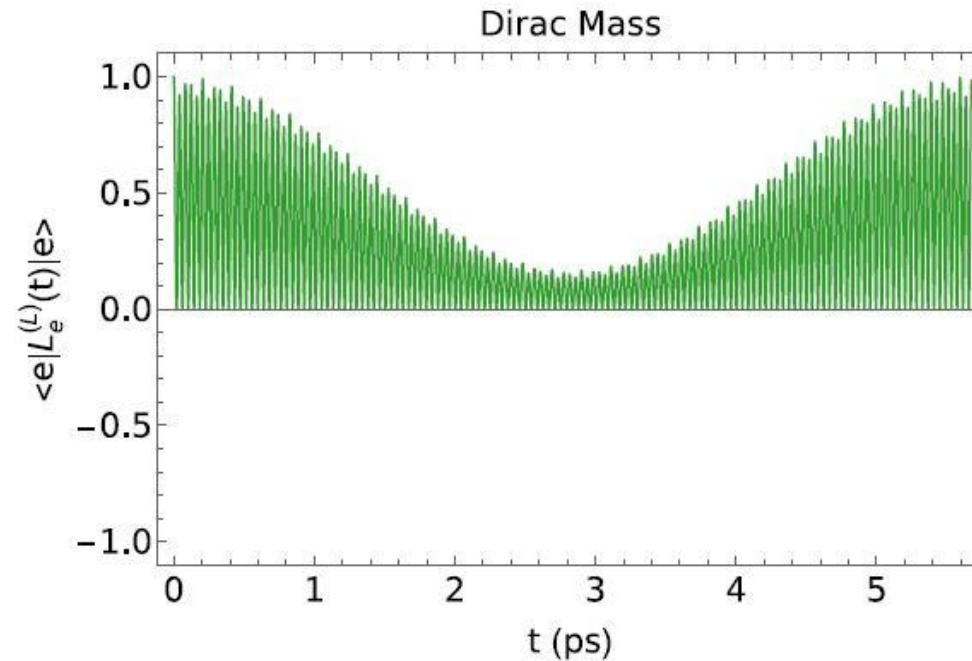
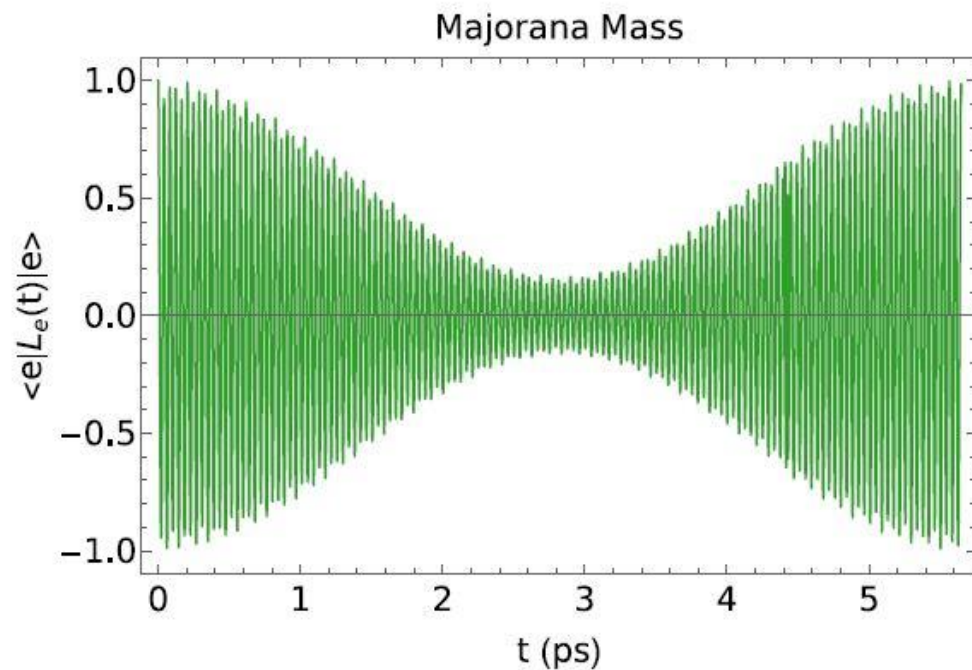
Numerical comparison:

Majorana vs Dirac left-handed electron family number

$q=0.0002$ (eV)

The lightest neutrino mass=0.01(eV)

Inverted hierarchy case, Majorana phases are set to be zero



A. S. Adam, N. Benoit, Y. Kawamura, Y. Matsuo, T.M., Y. Shimizu, N. Toyota,
arxiv.2106.02783 (Dirac and Majorana Case)

マヨラナとディラックの差とマヨラナ位相に対する依存性 (2世代模型)

$$\begin{aligned}
 & \langle e, q | L_{\mu}^M(t, \alpha_{21}) - L_{\mu}^D(t) | e, q \rangle \\
 = & - \sum_{i=1}^2 |V_{ei}|^2 |V_{\mu i}|^2 \frac{m_i^2}{E_i^2} \sin^2 E_i t - 2 \frac{(m_1 \sin E_1 t)(m_2 \sin E_2 t)}{E_1 E_2} \operatorname{Re}(V_{e1}^* V_{e2} V_{\mu 1}^* V_{\mu 2}) \\
 = & -\cos^2 \theta \sin^2 \theta \left\{ \frac{m_1^2}{E_1^2} \sin^2 E_1 t + \frac{m_2^2}{E_2^2} \sin^2 E_2 t + 2 \cos(-\beta_1 - \beta_2) \left(\frac{m_1 \sin E_1 t}{E_1} \frac{m_2 \sin E_2 t}{E_2} \right) \right\} \\
 = & -\cos^2 \theta \sin^2 \theta \left\{ \frac{m_1^2}{E_1^2} \sin^2 E_1 t + \frac{m_2^2}{E_2^2} \sin^2 E_2 t - 2 \cos(\alpha_{21}) \left(\frac{m_1 \sin E_1 t}{E_1} \frac{m_2 \sin E_2 t}{E_2} \right) \right\} \\
 & -\beta_1 - \beta_2 = -2\beta_1 - \pi = \alpha_{21} - \pi \\
 & \langle e, q | L_e^M(t, \alpha_{21}) - L_e^D(t) | e, q \rangle \\
 = & - \left\{ \cos^4 \theta \frac{m_1^2}{E_1^2} \sin^2 E_1 t + \sin^4 \theta \frac{m_2^2}{E_2^2} \sin^2 E_2 t + 2 \cos(\alpha_{21}) \cos^2 \theta \sin^2 \theta \left(\frac{m_1 \sin E_1 t}{E_1} \frac{m_2 \sin E_2 t}{E_2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

2世代模型の場合のマヨラナ位相依存性

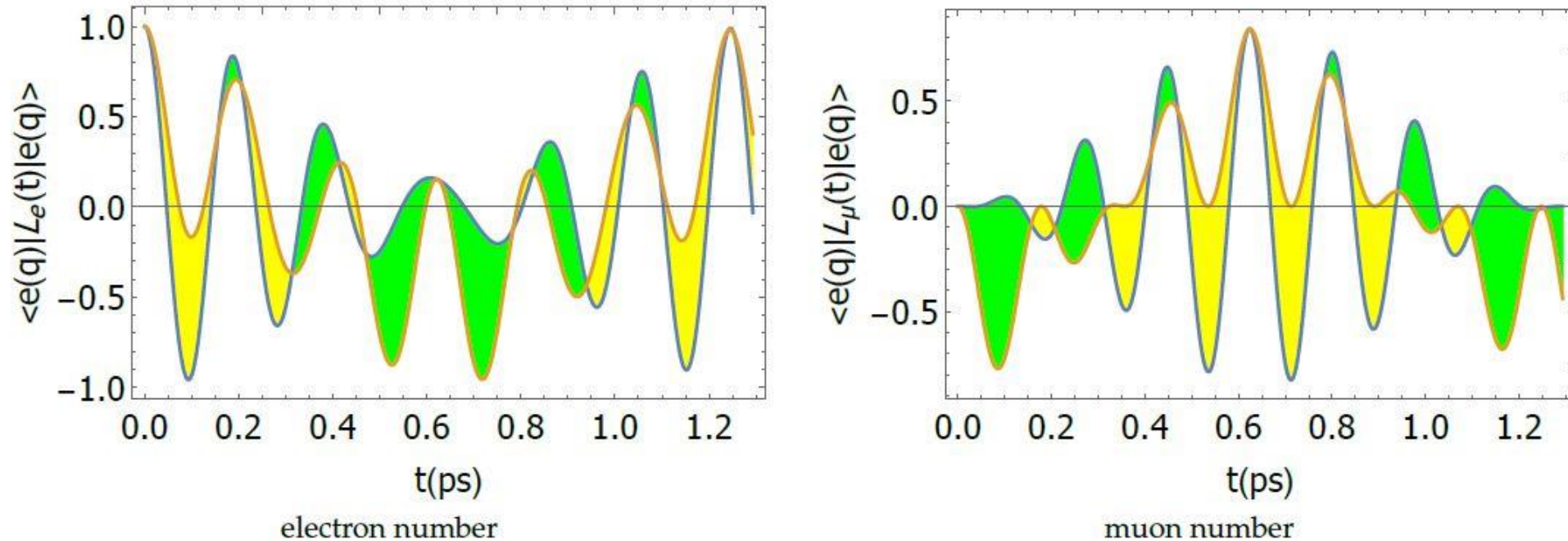


Figure 3: Time dependence of lepton family numbers $\langle e|L_e(t)|e\rangle$ and $\langle e|L_\mu(t)|e\rangle$ for two family model. The lightest neutrino mass is 0.01 (eV) and the momentum of the neutrinos are $|\mathbf{q}| = 0.0002$ (eV). The filled region corresponds to the change of a single Majorana phase α_{21} within the range $[0, \pi]$. The mixing angle θ_{12} is chosen as $\sin \theta_{12} = 0.551$, $\cos \theta_{12} = 0.834$ and $\Delta^2 m_{21} = 7.42 \times 10^{-5}$ (eV²). The blue colored lines show the case with the Majorana phase $\alpha_{21} = 0$ while the light brown colored lines show the case with $\alpha_{21} = \pi$.

結論

- 軽いマヨラナニュートリノの担うレプトン数の時間発展の表式の、マヨラナ位相に対する依存性を調べた。
- 特に非相対論的な場合には相対論的なニュートリノ振動に特徴的なリフェージング不変量の他にマヨラナニュートリノに特徴的なリフェージング不変量が現れる。
- この依存性をとらしてマヨラナニュートリノのユニタリー三角形やマヨラナ位相を決める方法を2世代模型の場合に考察した。